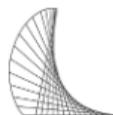


Übersicht

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

Der Quotientenvektorraum $V \geq U \rightsquigarrow V \longrightarrow V/U$ surj. VR-Homom. mit Kern U
 $v \mapsto v+U$ \parallel
 $\{v+U; v \in V\}$

Nebenklassen in Gruppen G Gruppe, $H \subseteq G$ Untergrp $\rightsquigarrow gH$

Der Quotient einer Gruppe nach einem Normalteiler $\rightarrow G \rightarrow G/H$
 $\forall g \in G: gH = Hg$ $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Gruppe}}$

Quotienten von Ringen nach Idealen

R Ring, $\mathfrak{m} \subseteq R$ Ideal

Ziel: $R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$ surj. Ringhomom. mit Kern \mathfrak{m}
 $x \longmapsto x + \mathfrak{m}$

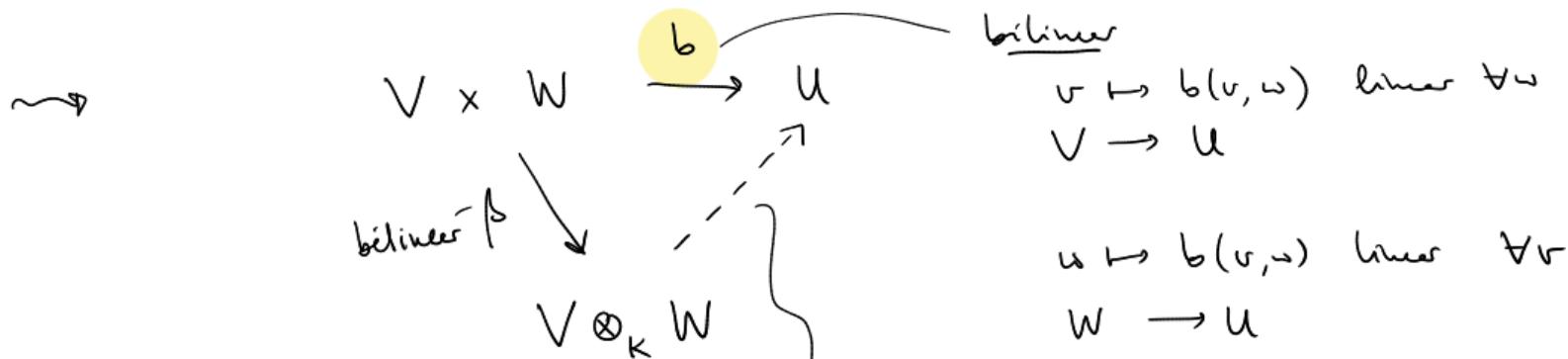
Wiederholung: Der Dualraum eines Vektorraums

V VR über K \rightarrow $V^\vee := \text{Hom}_K(V, K)$ Dualraum

$V \rightarrow W$ \rightsquigarrow $W^\vee \rightarrow V^\vee$ duale Abb.

Das Tensorprodukt

K Kp, V, W VR über K

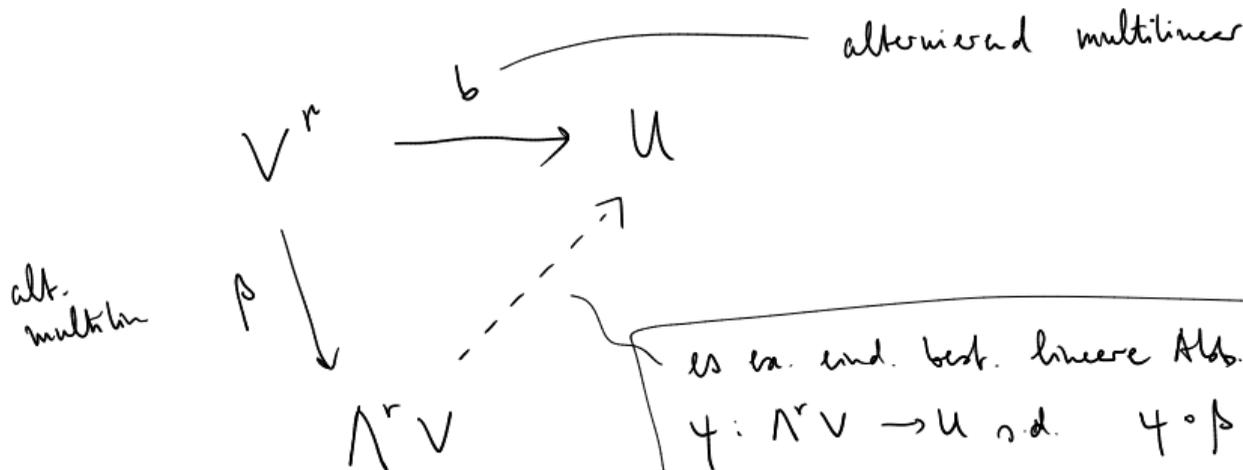


"universelle Eig
des Tensorprodukts"

es ex. lin. sind
bestimmte linear Abb. γ
mit $\gamma \circ \beta = b$

Die äußere Algebra

die äußeren Potenzen eines VR V



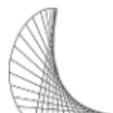
"univ. Eig. der r -ten äußeren Potenzen".

Quotienten von Ringen nach Idealen

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Quotienten von Ringen nach ...

Kerne von Ringhomom. sind Ideale

→ Ziel: Konstruieren zu R Ring
 $\mathfrak{a} \subseteq R$ Ideal

einen Quotienten R/\mathfrak{a}

+ kanon. Proj. $R \rightarrow R/\mathfrak{a}$, surj.-Ringhomom.
mit Kern \mathfrak{a}

Quotienten von Ringen nach Idealen

Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal.

Dann ist $(R, +)$ eine kommut. Gruppe,

$\rightarrow R/\mathfrak{a}$ Quotient von Gruppe

Multiplikation

Ziel: $(x + \mathfrak{a}) \cdot (y + \mathfrak{a}) := xy + \mathfrak{a}$

Frage: wohldefiniert

Sei R ein Ring

$\mathfrak{a} \subseteq R$ eine Untergruppe

R/\mathfrak{a} = Menge der Nebenklassen
 $x + \mathfrak{a}$

= Menge der Äquivalenzklassen

bzgl.

$x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \in \mathfrak{a}$

Addition:

$(x + \mathfrak{a}) + (y + \mathfrak{a}) = x + y + \mathfrak{a}$.

Quotienten von Ringen nach Idealen

Wohldefiniertheit der Multiplikation: seien $\underbrace{x \sim x'}_{x-x' \in \mathfrak{m}}$, $\underbrace{y \sim y'}_{y-y' \in \mathfrak{m}}$. z.z.: $xy \sim x'y'$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } xy - x'y' &= xy - xy' + xy' - x'y' \\ &= x \underbrace{(y-y')}_{\in \mathfrak{m}} + \underbrace{(x-x')}_{\in \mathfrak{m}} y' \in \mathfrak{m} \end{aligned}$$

Dann ist R/\mathfrak{m} mit der Add. und Mult. wie hier definiert ein Ring mit Eins $(1+\mathfrak{m})$.

Wenn R kommutativ ist, dann ist R/\mathfrak{m} kommutativ.

Die kanon. Projektion $R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ ist ein surj. Ringhomom. mit Kern \mathfrak{m} .
 $x \mapsto x+\mathfrak{m}$

Quiz / Beispiel: Quotienten von \mathbb{Z}

Geben Sie alle Quotienten des Rings \mathbb{Z} an.

Quiz / Beispiel: Quotienten von \mathbb{Z}

Geben Sie alle Quotienten des Rings \mathbb{Z} an.

- \mathbb{Z} ist ein Hauptidealring, und für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $(n) = (-n)$
- $n \geq 2$: $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/(-n) = \mathbb{Z}/n$ der Restklassenring mit n Elementen, den wir schon in der LA 1 konstruiert haben
- $n = 1$: $\mathbb{Z}/(1) = \mathbb{Z}/(-1) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0\}$ der Nullring
- $n = 0$: $\mathbb{Z}/(0) = \mathbb{Z}$

Der Homomorphiesatz für Ringe

Satz Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion.
Sei $f: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

(1) ("Universelle Eig. des Quotienten") Wenn $\mathfrak{a} \subseteq \text{Ker}(f)$ ist, dann existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\varphi: R/\mathfrak{a} \rightarrow S$ mit $f = \varphi \circ \pi$



(2) Existiert $\varphi: R/\mathfrak{a} \rightarrow S$ mit $f = \varphi \circ \pi$, so gilt $\mathfrak{a} \subseteq \text{Ker}(f)$ und

- $\text{im}(\varphi) = \text{im}(f)$
- φ injektiv $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \text{Ker}(f)$.

Quiz

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

$$\text{End}_K(V)$$

Schreiben Sie den Ring $K[f]$ als den Quotienten des Polynomrings $K[X]$ nach einem geeigneten Ideal.

Quiz

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Schreiben Sie den Ring $K[f]$ als den Quotienten des Polynomrings $K[X]$ nach einem geeigneten Ideal.

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & f \\ K[X] & \xrightarrow{\Phi} & K[f] \\ \downarrow & & \nearrow \cong \\ K[X] / \underbrace{\ker(\Phi)}_{= (\text{minpol}_f)} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \in \text{End}_K(V) \\ \hline \leadsto K[X] / (\text{minpol}_f) \cong K[f]. \end{array}$$

Wiederholung: Der Dualraum

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Definition des Dualraums

K Körper

V ein K -VR.

Dann heißt $V^\vee := \text{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum von V . (Auch: V^*)

$$\begin{array}{l} \psi \\ \lambda, \mu \end{array} \left[\begin{array}{l} (\lambda + \mu)(v) = \lambda(v) + \mu(v) \\ (a \cdot \lambda)(v) = a \cdot \lambda(v) \end{array} \right. \quad a \in K$$

Beispiel K^n

$$(K^n)^\vee = \text{Hom}_K(K^n, K) \stackrel{\sim}{=} M_{1 \times n}(K)$$

Standardbasis

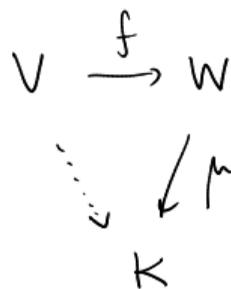
$$(\lambda: K^n \rightarrow K) \mapsto M(\lambda)$$

$$\lambda \longleftrightarrow (\lambda(e_1), \dots, \lambda(e_n))$$

Die duale Abbildung

K Körper, V, W VR über K

Sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus.



Dann heißt $f^v: W^v \rightarrow V^v$
 $\mu \mapsto \mu \circ f$

die zu f duale Abbildung. Dies ist ein VR-Homomorphismus.

Die Konstruktion ist verträglich mit Verkettung, $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$

$\leadsto f^v: W^v \rightarrow V^v, g^v: V^v \rightarrow U^v, (f \circ g)^v = g^v \circ f^v$

Es gilt $(id_V)^v = id_{V^v}$. (Also: f Isomorphismus $\Rightarrow f^v$ Isomorphismus).

Die duale Basis

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionales K -VR,
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V .

Sei $b_i^\vee \in V^\vee$ gegeben durch $b_i^\vee(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann bilden $b_1^\vee, \dots, b_n^\vee$ eine Basis von V^\vee , die sogenannte duale Basis
der Basis B . Bemerkung: $B^\vee = (b_1^\vee, \dots, b_n^\vee)$.

Insbes. Falls V endlichdimil, dann $\dim V^\vee = \dim V$.

Die darstellende Matrix der dualen Abbildung

Sei K ein Körper, V, W endlichdim' VR über K ,
mit Basen \mathcal{B}, \mathcal{C}
und seien $\mathcal{B}^\vee, \mathcal{C}^\vee$ die dualen Basen (von V^\vee, W^\vee).

Schreibe
 $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$
 $\mathcal{B}^\vee = (b_1^\vee, \dots, b_n^\vee)$
 $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$
 $\mathcal{C}^\vee = (c_1^\vee, \dots, c_m^\vee)$

Sei $f: V \rightarrow W$ ein VR-Homomorphismus, und $f^\vee: W^\vee \rightarrow V^\vee$ die dazu
duale Abb.

$$f \mapsto f^\vee$$

Satz.

$$\text{Es gilt } M_{\mathcal{C}^\vee}^{\mathcal{B}}(f)^\top = M_{\mathcal{B}^\vee}^{\mathcal{C}^\vee}(f^\vee).$$

Beweis Schreibe $M_{\mathcal{C}^\vee}^{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann $f^\vee(c_j^\vee) = \underbrace{c_j^\vee \circ f}_{\substack{\text{bi-einstreu} \\ \downarrow}} = \underbrace{\sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} b_\ell^\vee}_{\substack{\text{bi-einstreu} \\ \downarrow}} = c_j^\vee(f(b_i)) = c_j^\vee\left(\sum_{\ell} a_{\ell i} c_\ell\right) = a_{ij}$ Koeff. von b_i^\vee

Injektivität/Surjektivität der dualen Abbildung

Seien K ein Körper, V, W VR über K , $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus

Sei $f^\vee: W^\vee \rightarrow V^\vee$ die duale Abbildung zu f .

Satz (1) f injektiv $\iff f^\vee$ surjektiv,

(2) f surjektiv $\iff f^\vee$ injektiv.

Der Rang der dualen Abbildung

Seien $K = K_f$, V, W endlichdim. K -VR.

Satz. Sei $f: V \rightarrow W$ lin. Homom. Dann gilt $\text{rg}(f^\vee) = \text{rg}(f)$.

Beweis Schreibe f als Verkettung: $V \twoheadrightarrow \text{Im}(f) \hookrightarrow W$

$\leadsto f^\vee$ ist die Verkettung $W^\vee \twoheadrightarrow \text{Im}(f)^\vee \hookrightarrow V^\vee$,

also gilt $\text{Im}(f^\vee) \cong \text{Im}(f)^\vee$,

dh. $\text{rg}(f^\vee) = \dim \text{Im}(f^\vee) = \dim(\text{Im}(f)^\vee) = \dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f)$.

Der Doppeldualraum

Sei K ein Körper,

V ein K -Vektorraum.

Sei $V^{VV} := (V^V)^V = \text{Hom}_K(V^V, K)$ der Doppeldualraum von V .

Haben "kanonische" Abbildung $V \rightarrow V^{VV}$
 $v \mapsto \left(\begin{array}{c} V^V \rightarrow K \\ \lambda \mapsto \lambda(v) \end{array} \right).$

Satz Die kanonische Abbildung $V \rightarrow V^{VV}$ ist injektiv.

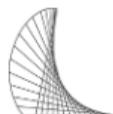
Wenn V endlichdimensional ist, dann ist sie ein Isomorphismus
 $V \cong V^{VV}.$

Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Bilineare Abbildungen

Sei K ein Körper, V, W, U VR über K

Eine Abb. $V \times W \xrightarrow{b} U$ heißt bilinear, wenn

für alle $v_0 \in V$ und $w_0 \in W$ gilt:

die Abb. $W \rightarrow U$, $V \rightarrow U$ sind linear.
 $w \mapsto b(v_0, w)$, $v \mapsto b(v, w_0)$

Kontrolle: $b(v_0, aw + a'w') = a \cdot b(v_0, w) + a' b(v_0, w')$ b linear im zweiten Eintrag
 $b(av + a'v', w_0) = a b(v, w_0) + a' b(v', w_0)$ b linear im ersten Eintrag

Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts

Def Seien K ein Körper und V, W VR über K . Ein Tensorprodukt von V und W über K ist ein K -VR T zusammen mit einer bilinearen

Abf. $V \times W \xrightarrow{\beta} T$, so dass die folgende universelle Eigenschaft

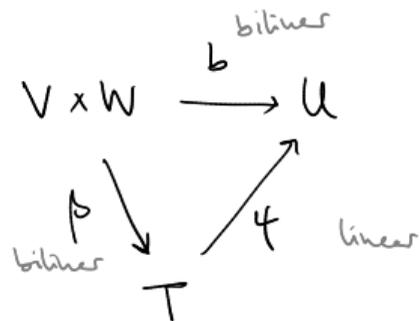
erfüllt ist:

Für jeden K -VR U und jede bilineare

Abf. $V \times W \xrightarrow{b} U$ existiert genau eine

lineare Abf. $T \xrightarrow{\psi} U$, so dass

$$b = \psi \circ \beta$$



Mit anderen Worten: Für jeden K -VR U ist die Abb.

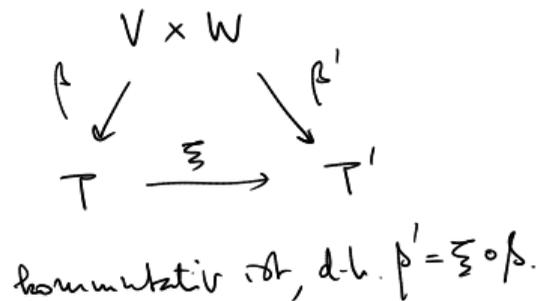
$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_K(T, U) & \longrightarrow & \text{Bil}_K(V \times W, U) & \text{bijektiv.} \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ \beta & \end{array}$$

Existenz des Tensorprodukts

Satz Sind V, W VR über dem Körper K , dann existiert ein Tensorprodukt von V und W über K , und dieses ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis Eindeutigkeit bis auf endl. Isom.: Seien $(T, \beta: V \times W \rightarrow T)$ und $(T', \beta': V \times W \rightarrow T')$ Tensorprodukte. Dann ex. ein endl. bestimmter Isomorphismus $\xi: T \rightarrow T'$, s.d.

Diese Aussage folgt mit der üblichen Methode aus der universellen Eigenschaft.



Erweiterung des Tensorprodukts

Sei

$$S = K^{(V \times W)} = \bigoplus_{i \in V \times W} K.$$

Wir haben Abb.

$$V \times W \xrightarrow{\alpha} S$$
$$(v, w) \mapsto e_{(v, w)}$$

"Standardbasiselement",
1 an Index (v, w) ,
0 sonst.

(nicht bilinear!)

Sei $u \in S$ der UVR von S , der erzeugt wird von allen Elementen

der Form

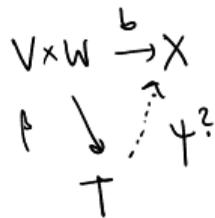
$$e_{(av + a'v', w)} - (ae_{(v, w)} + a'e_{(v', w)})$$
$$e_{(v, aw + a'w')} - (ae_{(v, w)} + a'e_{(v, w')})$$

für alle
 $v, v' \in V$,
 $w, w' \in W$,
 $a, a' \in K$

Sei $T := S/U$. Dann ist die Abb. $\beta: V \times W \rightarrow S \rightarrow T$ bilinear.

Behauptung T mit $\beta: V \times W \rightarrow T$ ist ein Tensorprodukt.

Begründung. Sei $b: V \times W \rightarrow X$ eine bilinear Abb.



Jedenfalls kann es dem höchstens eine Abb. $\psi: T \rightarrow X$

geben, so dass $\psi \circ \beta = b$.

Denn für das Bild $\overline{e_{(v,w)}}$ von $e_{(v,w)} \stackrel{S}{\mapsto} T$ muss $\psi(\overline{e_{(v,w)}}) \quad (*)$

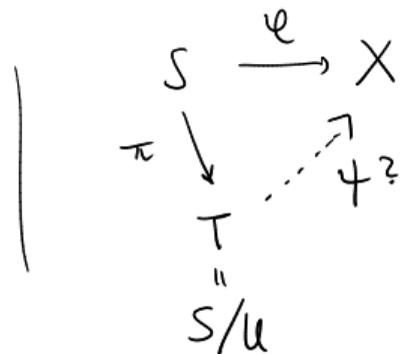
und diese Elem. sind ein EZ von T .

$$= b(v,w) \text{ gelten}$$

Jedenfalls ex. eine endl. best. lineare Abb. $\psi: S \rightarrow X$

mit $\varphi(e_{(v,w)}) := b(v,w)$

Zur Konstruktion von φ mit der Eigenschaft (*)
 ist nach dem Homomorphiesatz zu zeigen,
 dass $U \subseteq \text{Ker}(\varphi)$.



Dann genügt es zu zeigen, dass alle Elemente
 des oben gewählten ES von U unter φ auf Null abgebildet werden

Zum Beispiel
$$\begin{aligned} & \varphi(e_{(av+av',w)} - (a \cdot e_{(v,w)} + a' e_{(v',w)})) \\ &= \varphi(e_{(av+av',w)}) - a \varphi(e_{(v,w)}) - a' \varphi(e_{(v',w)}) \\ &= b(av+av',w) - a b(v,w) - a' b(v',w) = 0 \end{aligned}$$

Elementartensoren

Wir bezeichnen das Tensorprodukt von V und W über K mit $V \otimes_K W$.

Das Bild von $(v, w) \in V \times W$ unter der bilinearen Abb. $V \times W \xrightarrow{f} V \otimes_K W$ bezeichnen wir mit $v \otimes w$. Diese Elemente heißen Elementartensoren.

Rechenregeln für Elementartensoren: f bilinear \iff

$$(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w,$$

$$v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w',$$

$$(av) \otimes w = a \cdot (v \otimes w)$$

$$v \otimes (aw) = a \cdot (v \otimes w)$$

$$v, v' \in V,$$

$$w, w' \in W,$$

$$a \in K$$

Quiz

Schreiben Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^2$$

als Elementartensor.

Quiz

Schreiben Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^2$$

als Elementartensor.

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Achtung: Nicht jedes Element eines Tensorprodukts lässt sich als Elementartensor schreiben!

Quiz

Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K .

Seien $v \in V, w \in W$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $v \otimes w = 0$ (in $V \otimes_K W$),
- (ii) für jede bilineare Abbildung $b: V \times W \rightarrow U$ in einen K -Vektorraum U gilt $b(v, w) = 0$.

Quiz

Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K .

Seien $v \in V, w \in W$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $v \otimes w = 0$ (in $V \otimes_K W$),

(ii) für jede bilineare Abbildung $b: V \times W \rightarrow U$ in einen K -Vektorraum U gilt $b(v, w) = 0$.

(i) \Rightarrow (ii) Gilt (i) und ist b gegeben,

so betrachte

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b} & U \\ \beta \downarrow & & \uparrow \gamma \\ & & V \otimes_K W \end{array}$$

$$\begin{aligned} \leadsto b(v, w) &= \\ \gamma(\underbrace{\beta(v, w)}_{= v \otimes w}) &= 0 \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i)

Die Abb. $\beta: V \times W \rightarrow V \otimes_K W$
ist bilinear und
 $v \otimes w = \beta(v, w) \stackrel{(ii)}{=} 0$.

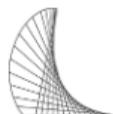
Sehen später : $v \otimes w = 0 \iff v = 0 \text{ oder } w = 0$.

Eigenschaften des Tensorprodukts

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

$V \otimes_K W$ wird erzeugt von Elementartensoren

Satz K Körper, V, W VR über K .

Dann bilden die Elementartensoren $v \otimes w$, $v \in V, w \in W$,
ein Erzeugendensystem des Tensorprodukts $V \otimes_K W$.

Beweis • aus der Konstruktion eines Tensorprodukts $K^{(V \times W)} / U$.

• mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts:

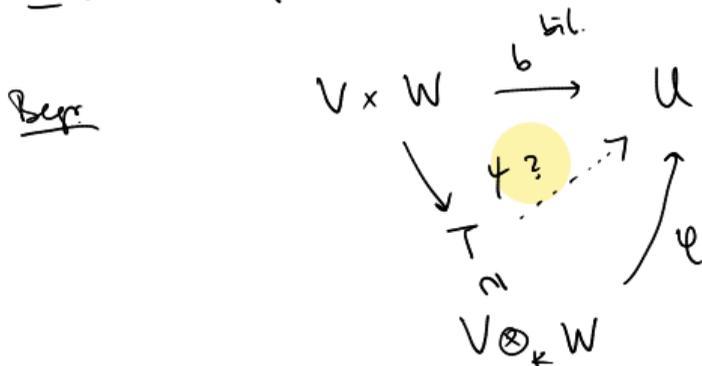
Sei $T \subseteq V \otimes_K W$ der von den Elementartensoren erzeugte Untervektorraum.

Dann liegt das Bild der Abb. $V \times W \xrightarrow{f} V \otimes_K W$, $(v, w) \mapsto v \otimes w$,

in T .

$V \otimes_K W$ wird erzeugt von Elementartensoren

Beh. T erfüllt die unv. Eig. des Tensorprodukts.



Definiere ψ als $\varphi|_T$.

Es folgt dann, dass $T = V \otimes_K W$

"irgendeine
K-VR"

Werden jetzt die unv. Eig. mehrfach benutzen, um Abb. $V \otimes_K W \rightarrow U$ zu konstruieren, indem wir bil. Abb. $V \times W \rightarrow U$ angeben, indem wir einen bil. Ausdruck als Bild der Elementartensoren $v \otimes w$ angeben.

Das Tensorprodukt von Homomorphismen

$K \quad K_p.$

V, W, V', W' VR über K ,

$f: V \rightarrow V', \quad g: W \rightarrow W'$ Homomorphismen

→ erhaltene Homom.

$$f \otimes g: V \otimes_K W$$

$$\rightarrow V' \otimes_K W'$$

$$v \otimes w \mapsto \underbrace{f(v) \otimes g(w)}$$

Der Homom. $f \otimes g$ heißt das
Tensorprodukt der Abb. f, g .

Die Konstruktion ist verknüpfbar mit

$$\text{der Verkettung } ((f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2) = (f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)),$$

$$\text{und } \text{id}_V \otimes \text{id}_W = \text{id}_{V \otimes W}.$$

dieser Ausdruck verhält sich
bilinear in v, w

(d.h. die Abb.

$$V \times W \rightarrow V' \otimes_K W'$$

$$(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$$

ist
bilinear)

Einfache Eigenschaften

Sei K ein Körper, U, V, W VR über K .

Dann hat man „kanonische“ Isomorphismen

$$(1) \quad K \otimes_K W \xrightarrow{\cong} W, \quad a \otimes w \mapsto aw, \quad \text{Umkehrabl. } W \rightarrow K \otimes_K W.$$
$$w \mapsto 1 \otimes w$$

$$(2) \quad V \otimes_K K \xrightarrow{\cong} V, \quad v \otimes a \mapsto av$$

$$(3) \quad V \otimes_K W \xrightarrow{\cong} W \otimes_K V, \quad v \otimes w \mapsto w \otimes v,$$

$$\text{Umkehrabl.: } W \otimes_K V \rightarrow V \otimes_K W, \quad w \otimes v \mapsto v \otimes w,$$

$$(4) \quad (U \otimes_K V) \otimes W \xrightarrow{\cong} U \otimes_K (V \otimes_K W), \quad (u \otimes v) \otimes w \mapsto \overbrace{u \otimes (v \otimes w)}^{\text{bil. in } u \otimes v \text{ und } w}.$$

(entsprechend für endliche Familien V_1, \dots, V_r von K -VR).

Tensorprodukt und Hom

$$(5) \quad \text{Hom}(V \otimes_K W, U) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(V, \text{Hom}_K(W, U))$$
$$\psi \quad \longmapsto \quad (v \mapsto (w \mapsto \psi(v \otimes w)))$$

Umkehrabb.: $\text{Hom}_K(V, \text{Hom}_K(W, U)) \rightarrow \text{Hom}(V \otimes_K W, U)$

$$\varphi \quad \longmapsto \quad (v \otimes w \mapsto \underbrace{\varphi(v)(w)}_{\text{bilinear in } v, w})$$

Tensorprodukt und direkte Summen

Sei K ein Körper, V und $W_i, i \in I$, V_R über K .

Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$V \otimes_K \bigoplus_{i \in I} W_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i), \quad v \otimes (w_i)_i \mapsto (v \otimes w_i)_{i \in I}$$

Um zu sehen, dass dies ein Isomorphismus ist, kann man

• Umkehrabbildung angeben, oder

• zeigen, dass $V \otimes_K \bigoplus_{i \in I} W_i$ die universelle Eigenschaft der direkten Summe

$$\bigoplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i) \text{ erfüllt}$$

Tensorprodukt und direkte Summen

27.1

Gegeben eine Familie $V \otimes_k W_i$

dann ex. eine endl. best. Abb.

$$f_i: V \otimes_k W_i \rightarrow U,$$

$$V \otimes_k \bigoplus_{i \in I} W_i \rightarrow U$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow f_i \\ & \nwarrow & \\ & V \otimes_k W_i & \end{array}$$

$$v \otimes (u_i)_i \mapsto \sum_{i \in I} f_i(v \otimes u_i)$$

Eine Basis des Tensorprodukts

Seien K ein Körper, V, W VR über K

Sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , $(c_j)_{j \in J}$ eine Basis von W .

Satz. Dann bilden die Elemente $b_i \otimes c_j$, $i \in I, j \in J$,
eine Basis des Tensorprodukts $V \otimes_K W$.

Beweis Die Basen von V und W liefern uns Koordinatenisomorphismen

$$V \xrightarrow{c_B} K^{(I)}, \quad W \xrightarrow{c_W} K^{(J)}. \quad \text{Damit erhalten wir}$$

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\xrightarrow{c_B \otimes c_W} K^{(I)} \otimes_K K^{(J)} = \left(\bigoplus_{i \in I} K \right) \otimes_K K^{(J)} = \bigoplus_{i \in I} \underbrace{K \otimes_K K^{(J)}}_{K^{(J)}} \\ &= \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} K = K^{(I \times J)} \end{aligned}$$

Eine Basis des Tensorprodukts

Erhalte eine Isom. $V \otimes_K W \xrightarrow{\sim} K^{(I \times J)}$

$$b_i \otimes c_j \longmapsto e_{(i,j)} \quad (i,j) \in I \times J$$

Korollar: Sind V, W endlichdimensional, so gilt

$$\dim(V \otimes_K W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Korollar: Für $v \in V$ und $w \in W$ gilt $v \otimes w = 0 \iff v=0$ oder $w=0$.

Quiz

Geben Sie die horizontale Abbildung im kommutativen Diagramm

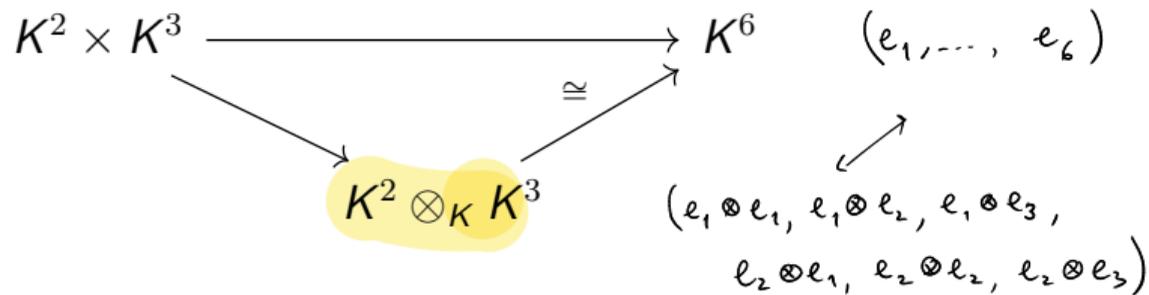
$$\begin{array}{ccc} K^2 \times K^3 & \xrightarrow{\quad} & K^6 \\ & \searrow & \nearrow \text{is} \\ & K^2 \otimes_K K^3 & \end{array}$$

„konkret“ an:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \right) \mapsto$$

Quiz

Geben Sie die horizontale Abbildung im kommutativen Diagramm



„konkret“ an:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \mapsto (xa, xb, xc, ya, yb, yc)^t$$

Unter der Identifikation
 $K^2 \otimes_K K^3 = K^6$
ist dieses Element
der Elementartensor
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel eines Tensorprodukts $V \otimes_K W$, in dem nicht jedes Element ein Elementartensor ist.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel eines Tensorprodukts $V \otimes_K W$, in dem nicht jedes Element ein Elementartensor ist.

- Einfachste Möglichkeit: K endlicher Körper mit q Elementen, $V = K^m$, $W = K^n$

$$\rightarrow \#(V \times W) = q^{m+n}, \quad \#(V \otimes_K W) = q^{mn}$$

Jedenfalls dann, wenn $mn > m+n$ ist, kann nicht jedes Element von $V \otimes_K W$ im Bild der Abb. $V \times W \rightarrow V \otimes_K W$ liegen.

Achtung

Man kann hier nicht mit der Dimension arbeiten, weil die Abb. $V \times W \xrightarrow{\beta} V \otimes_K W$ nicht linear ist!

Aus $\dim V \times W < \dim V \otimes_K W$ folgt daher nicht direkt, dass β nicht surjektiv ist.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel eines Tensorprodukts $V \otimes_K W$, in dem nicht jedes Element ein Elementartensor ist.

- Konstruktion: K Körper, $V = W = K^2$ mit Stdbasis e_1, e_2

Beh. $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in K^2 \otimes_K K^2$ lässt sich nicht als Elementartensor schreiben.

Begr. Angenommen, es wäre $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = v \otimes v'$.

Schreibe $v = ae_1 + be_2$, $v' = a'e_1 + b'e_2$

$$\leadsto e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = (ae_1 + be_2) \otimes (a'e_1 + b'e_2) = aa'e_1 \otimes e_1 + ab'e_1 \otimes e_2 + ba'e_2 \otimes e_1 + bb'e_2 \otimes e_2$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ e_i \otimes e_j \text{ Basis} \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{aa'=0}, \quad ab'=1, \quad ba'=1, \quad bb'=0 \\ \text{also } a=0 \quad \text{oder} \quad a'=0 \end{array}$$

Das ist nicht möglich.

Das Tensorprodukt und die Spur

Sei K ein Körper, V ein endlichdim. K -VR.

Dann ist die Abb. $V^\vee \otimes_K V \longrightarrow \text{Hom}_K(V, V)$ ein Isomorphismus.

$$\lambda \otimes v \longmapsto (x \mapsto \lambda(x) \cdot v)$$

Beweis Wähle Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} K^n$. Erhalte

$$\begin{aligned} V^\vee \otimes_K V &\cong V^\vee \otimes K^n \cong (V^\vee \otimes_K K)^n = (V^\vee)^n \\ &= \text{Hom}(V, K)^n = \text{Hom}(V, K^n) = \text{Hom}(V, V). \end{aligned}$$

(univ. Eig. des Produkts K^n)

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. V \cong K^n$

Nun prüft man nach, dass diese Kette von Isomorphismen die Verkettung die obige Abb. liefert.

Korr. K Körper, V ein endlichdim. K -VR. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{End}_K(V) & \xleftarrow{\sim \Phi} & V^\vee \otimes_K V \\
 \text{Spur} \searrow & & \swarrow \text{ev} \\
 & K & \lambda(v) \\
 & & \nwarrow \lambda \otimes v \\
 & & \text{kommutativ}
 \end{array}$$

Beweis. Sei $(b_1, \dots, b_n) = B$ eine Basis von V . Sei $\lambda \in V^\vee$, $v = \sum_j a_j b_j \in V$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\Phi(\lambda \otimes v)) &= \text{Spur}(\underbrace{x \mapsto \lambda(x)v}_{b_i \mapsto \lambda(b_i)v}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \lambda(b_i) \\ &= \lambda\left(\sum a_i b_i\right) = \lambda(v) = \text{ev}(\lambda \otimes v). \end{aligned}$$

$\sum_j a_j \lambda(b_j) b_j$

Erweiterung der Skalare

Sei K ein Körper, der Teilkörper eines Körpers L ist.

Beispiel: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Sei V ein K -VR.

Wir können L als K -VR auffassen.

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \rightarrow & L \\ \cup & & \nearrow \\ K \times L & & \text{Skalarmult.} \end{array}$$

\leadsto Tensorprodukt $V \otimes_K L$

Satz Mit der Skalarmult. $L \times (V \otimes_K L) \rightarrow V \otimes_K L, (a, v \otimes b) \mapsto v \otimes ab$

wird $V \otimes_K L$ zu einem L -Vektorraum.

Man nennt $V \otimes_K L$ den L -VR, der aus V durch Erweiterung der Skalare von K auf L entsteht.

Satz Ist in der Funktion $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis des K -VR V ,
dann bilden die Elemente $b_i \otimes 1 \in V \otimes_K L$ eine Basis
des L -VR $V \otimes_K L$.

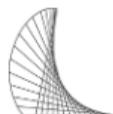
Inbes. gilt $\dim_L (V \otimes_K L) = \dim_K (V)$.

Die äußeren Potenzen eines Vektorraums

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Multilineare Abbildungen

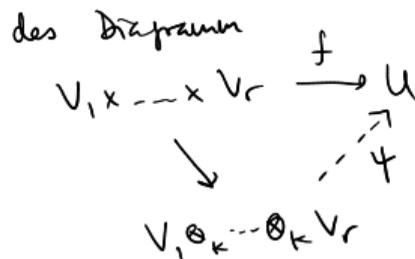
Sei K ein Körper,

seien V_1, \dots, V_r, U VR über K .

Def. Eine Abb. $f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow U$ heißt **multilinear**, wenn f linear in jedem Eintrag ist:

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, av + a'v', v_{i+1}, \dots, v_r) = a f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_r) + a' f(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_r).$$

Bem. Ist $f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow U$ multilinear, so ex. eine **end. bestimmte** lineare Abb. $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_r \xrightarrow{f} U$, so dass



kommutativ ist.

Alternierende multilineare Abbildungen

Sei K ein Körper,

seien V, U VR über K

Def. Eine multilineare Abb. $f: \overbrace{V \times \dots \times V}^{r \text{ Faktoren}} \rightarrow U$ heißt alternierend,
wenn gilt: Sind $v_i \in V, i=1, \dots, r$, und existieren $i \neq j$ mit $v_i = v_j$,

$$\text{so ist } f(v_1, \dots, v_r) = 0.$$

Haben in der LA1 gesehen: Es gilt denn für alle $v_i \in V, \sigma \in S_r$:

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_r).$$

Die universelle Eigenschaft der äußeren Potenz

Def. Seien K ein Körper, V ein K -VR, $r \in \mathbb{N}$.

Ein K -VR Λ zusammen mit einer alt. multilin. Abb.

$V^r \xrightarrow{\beta} \Lambda$ heißt r -te äußere Potenz

von V , falls die folg. universelle Eigenschaft

gilt:

Für alle K -VR U und alternierende multilin. Abb. $b: V^r \rightarrow U$

existiert eine eind. bestimmte linear Abb. $\gamma: \Lambda \rightarrow U$ od.

$$b = \gamma \circ \beta.$$

gesucht alt. multilin.

$$V^r \xrightarrow{b} U$$

$$\beta \downarrow \quad \uparrow \exists! \gamma \text{ linear}$$
$$\Lambda^r V$$

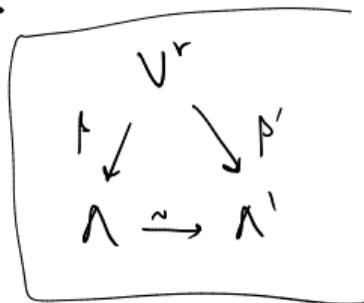
" r -te äußere Potenz von V "

Existenz der äußeren Potenz

Satz. Die r -te äußere Potenz existiert für jeden K -VR V und jedes $r \in \mathbb{N}$ und ist eindeutig bestimmt bis auf einen Isomorphismus

Wir bezeichnen "die" r -te äußere Potenz von V mit $\bigwedge^r V$.

Das Bild von $(v_1, \dots, v_r) \in V^r$ in $\bigwedge^r V$ schreiben wir $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ ("Dachprodukt").



- Beweis
- Eindeutigkeit: "Standardargument" anhand der unv. Eigenschaft
 - Existenz: Sei $V^{\otimes r} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r \text{ Faktoren}}$, $U = \langle v_i \otimes \dots \otimes v_r ; v_i \in V, \text{ es ex } i \neq j: v_i = v_j \rangle$

Dann ist $V^r \rightarrow V^{\otimes r} \rightarrow V^{\otimes r}/U$ alternierend multilin. und erfüllt die unv. Eig. der r -ten äußeren Potenz.

Quiz

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $n = \dim V$.

Begründen Sie: $(\wedge^n V)^\vee$ ist der Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V .

Quiz

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $n = \dim V$.

Begründen Sie: $(\underbrace{\wedge^n V}_\parallel)^V$ ist der Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V .

$$\parallel \\ \text{Hom}_K(\wedge^n V, K)$$

$$\begin{array}{ccc} V^n & \rightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \\ \wedge^n V & & \end{array}$$

Nach der univ. Eigenschaft von $\wedge^n V$ ist die Abbildung

$$\text{Hom}_K(\wedge^n V, K) \rightarrow \mathcal{D}_V := \underbrace{\{\text{alternierende multiline Abb. } V^n \rightarrow K\}}_{= \text{Determinantenfunktion auf } V}$$
$$\psi \longmapsto \psi \circ \beta$$

eine Bijektion, also ein VR-Isomorphismus. $(\beta: V^n \rightarrow \wedge^n V)$

Rechenregeln für Dachprodukte

$$\beta: V^r \rightarrow \wedge^r V$$

$$(v_1, \dots, v_r) \mapsto \beta(v_1, \dots, v_r) =: v_1 \wedge \dots \wedge v_r$$

- multilinear

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge (av + a'v') \wedge \dots \wedge v_r = a \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_r) \\ + a' \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v' \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_r)$$

- alternierend

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r = 0, \quad \text{wenn } i \neq j \text{ mit } v_i = v_j \text{ existieren}$$

$$\text{daraus folgt: } v_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{v_i}_{\substack{\downarrow \\ i}} \wedge \dots \wedge \underbrace{v_j}_{\substack{\downarrow \\ j}} \wedge \dots \wedge v_r = -v_1 \wedge \dots \wedge v_r$$

$$\text{und allgemeiner } v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(r)} = \text{sgn}(\sigma) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_r, \quad \sigma \in S_r.$$

Quiz

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \wedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Zeigen Sie (K ein Körper):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \in \wedge^2 K^3.$$

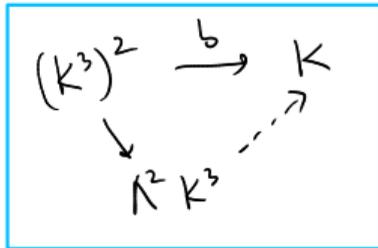
Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \wedge^2 \mathbb{Q}^2. \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie (K ein Körper):



$$\begin{matrix} e_1 & e_2 \\ // & // \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \wedge & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \neq 0 \in \wedge^2 K^3.$$

Es gibt eine alternierende multiline. Abb. $b: K^3 \times K^3 \rightarrow K$ mit $b(e_1, e_2) \neq 0$,
z.B. $b(v, w) := \det(v|w|e_3)$.

Die äußere Potenz von Homomorphismen

Seien V, W \mathbb{R} oder \mathbb{K} , $r \in \mathbb{N}$, $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus.

Dann existiert eine endl. best. lineare Abb.

$$\Lambda^r f : \Lambda^r V \rightarrow \Lambda^r W$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mapsto f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_r)$$

Begr. Wende unv.
Eig. von
 $\Lambda^r V$ an mit:

$$\begin{array}{ccc} V^r & \xrightarrow{b} & \Lambda^r W, \\ \downarrow & \nearrow \text{---} & \uparrow \Lambda^r f \\ \Lambda^r V & & \end{array}$$

$$b(v_1, \dots, v_r) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_r)$$

Diese Abb. b ist alternierend
und multilinear.

Eine Basis der äußeren Potenz

$r \in \mathbb{N}$.

Satz Sei V ein endlichdim'el K -VR, $n = \dim V$, b_1, \dots, b_n eine Basis von V .

Dann bilden die Elemente $b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_r}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$
eine Basis von $\Lambda^r V$

Insbesondere: $\dim \Lambda^r V = \text{Anzahl der } r\text{-elem. Teilmengen von } \{1, \dots, n\} = \binom{n}{r}$,

z.B. $\dim \Lambda^0 V = 1$,

$$\Lambda^r V = 0 \quad r > n$$

Beweis • Die angegebenen Elen. bilden ein Erzeugendensystem.

- Die Elem. der Form $v_i \wedge \dots \wedge v_r$ erzeugen $\Lambda^r V$

$$\begin{aligned} - v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r} &= \left(\sum a_{1i} b_i \right) \wedge \left(\sum a_{2i} b_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum a_{ri} b_i \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

- Die angegebenen Elemente sind linear unabhängig:

Beh. Sei (i_1, \dots, i_r) mit $i_1 < \dots < i_r$. Dann ex. eine lin. Abb.

$\Lambda^r V \rightarrow K$ od für alle (j_1, \dots, j_r) , $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ gilt:

$$b_{j_1} \wedge \dots \wedge b_{j_r} \mapsto \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (i_1, \dots, i_r) = (j_1, \dots, j_r) \\ \text{sonst.} \end{array}$$

Begr. Sei $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\} =: \{i'_1, \dots, i'_{n-r}\}$

$\leadsto b_{i_1}, \dots, b_{i_r}, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}}$ Basis von V

\leadsto es ex. (eind. best.) Determinantenfunktion $\Delta: V^n \rightarrow K$

mit $\Delta(b_{i_1}, \dots, b_{i_r}, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}}) = 1.$

Dann ist $V^r \rightarrow K, (v_1, \dots, v_r) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_r, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}})$

eine alt. multiline. Abb. Wir stellen so $K^r V \rightarrow K$

$(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_r, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}})$

mit der gewünschten Eigenschaft.

Die äußere Potenz und die Determinante eines Endomorphismus

Satz Sei V ein endlichdimensionaler K -VR, $n = \dim V$. Dann ist $\dim \Lambda^n V = \binom{n}{n} = 1$.

Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. $(\rightarrow \text{End}_K(\Lambda^n V) = K)$

Dann ist $\Lambda^n f: \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^n V$ die Multiplikation

mit $\det(f)$.

Beweis Die Verkleinerung $\Delta: V^n \rightarrow \Lambda^n V \cong K$ ist alternierend multilineär, also eine Determinantenfunktion. Also $\Delta \circ f^n = \det(f) \cdot \Delta$

$$\begin{array}{ccccc} (v_i): & V^n & \longrightarrow & \Lambda^n V & \xrightarrow{\sim} & K \\ \downarrow & f^n \downarrow & & \downarrow \Lambda^n f & & \downarrow \det(f) \\ (f(v_i)): & V^n & \longrightarrow & \Lambda^n V & \xrightarrow{\sim} & K \end{array} \quad \leadsto \quad \Lambda^n f = \det(f).$$

Quiz

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \wedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Quiz

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \wedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Sei $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ der Homom.

$$\text{mit } f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= f(e_1) \wedge f(e_2) \\ &= \det(f) \cdot e_1 \wedge e_2 \\ &= (-3) \cdot e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

analog

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot e_1 \wedge e_2 \\ &= (-3) \cdot e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

Die äußere Algebra

Sei K ein Körper, V ein K -VR.

Dann ist

$$\bigwedge V := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r V$$

zusammen mit der Multiplikation

$$\underbrace{(v_1 \wedge \dots \wedge v_r)}_{\substack{\cap \\ \bigwedge^r V}} \cdot \underbrace{(w_1 \wedge \dots \wedge w_s)}_{\substack{\cap \\ \bigwedge^s V}} = \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_s}_{\substack{\cap \\ \bigwedge^{r+s} V}} \in \bigwedge^{r+s} V \subseteq \bigwedge V$$

ein ^{ia.} (nicht kommutativer) Ring, die sog. äußere Algebra von V