Übersicht
Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung

Der Quotientenvektorraum $\quad V \geq U \rightsquigarrow V \longrightarrow V/U$ surj. VR-Homom mit Kern U

$$v \longmapsto v + U, \qquad V/U = \{v + U \,;\, v \in V\}$$

Nebenklassen in Gruppen $\quad G$ Gruppe, $H \leq G$ Untergp $\rightsquigarrow gH$

Der Quotient einer Gruppe nach einem Normalteiler $\rightsquigarrow \quad G \to \underbrace{G/H}_{\text{Gruppe}}$

$$\forall g \in G: \quad gH = Hg$$

Quotienten von Ringen nach Idealen

R Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ Ideal

Ziel: $\begin{aligned} R &\longrightarrow R/\mathfrak{a} \\ x &\longmapsto x + \mathfrak{a} \end{aligned}$ surj. Ringhomom. mit Kern $\mathfrak{a}$

Wiederholung: Der Dualraum eines Vektorraums

V VR über K $\rightsquigarrow$ $V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ Dualraum

$V \to W$ $\rightsquigarrow$ $W^\vee \to V^\vee$ duale Abb.

Das Tensorprodukt

K Körper, V, W VR über K

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"', "\text{bilinear}"] & U \\
V \otimes_K W \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

bilinear:

$v \mapsto b(v,w)$ linear $\forall w$

$V \to U$

$w \mapsto b(v,w)$ linear $\forall v$

$W \to U$

es ex. eine eind. bestimmte lineare Abb. φ mit $\varphi \circ \beta = b$

"universelle Eig. des Tensorprodukts"

Die äußere Algebra

/ die äußeren Potenzen eines VR V

alternierend multilinear

alt. multilin.

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"'] & U \\ \Lambda^r V \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

es ex. eind. best. lineare Abb. $\varphi : \Lambda^r V \to U$ s.d. $\varphi \circ \beta = b$.

„univ. Eig. der r-ten äußeren Potenz“.

Quotienten von Ringen nach Idealen
Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Quotienten von Ringen nach …

Kerne von Ringhomom. sind Ideale

$\rightsquigarrow$ Ziel: Konstruiere zu R Ring

$\mathfrak{a} \subseteq R$ Ideal

einen Quotienten $R/\mathfrak{a}$

+ kanon. Proj. $R \to R/\mathfrak{a}$, surj. Ringhomom.

mit Kern $\mathfrak{a}$

Quotienten von Ringen nach Idealen

Sei R ein Ring

Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal.

Dann ist $(R,+)$ eine komm. Gruppe, $\mathfrak{a} \subseteq R$ eine Untergruppe

$\rightsquigarrow$ $R/\mathfrak{a}$ Quotient von Gruppen

$R/\mathfrak{a}$ = Menge der Nebenklassen $x + \mathfrak{a}$

= Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $x \sim x' \iff x - x' \in \mathfrak{a}$

Addition: $(x+\mathfrak{a}) + (y+\mathfrak{a}) = x+y+\mathfrak{a}$.

Multiplikation

Ziel: $(x+\mathfrak{a}) \cdot (y+\mathfrak{a}) := xy + \mathfrak{a}$

Frage: wohldefiniert

Quotienten von Ringen nach Idealen

Wohldefiniertheit der Multiplikation: Seien $\underbrace{x \sim x'}_{x - x' \in \mathfrak{a}}$, $\underbrace{y \sim y'}_{y - y' \in \mathfrak{a}}$. z.z.: $xy \sim x'y'$

Es gilt:
$$xy - x'y' = xy - xy' + xy' - x'y'$$
$$= x\underbrace{(y - y')}_{\in \mathfrak{a}} + \underbrace{(x - x')}_{\in \mathfrak{a}}y' \in \mathfrak{a}$$

Dann ist $R/\mathfrak{a}$ mit der Add. und Mult. wie hier definiert ein Ring mit Eins $(1 + \mathfrak{a})$.

Wenn R kommutativ ist, dann ist $R/\mathfrak{a}$ kommutativ.

Die kanon. Projektion $R \to R/\mathfrak{a}$, $x \mapsto x + \mathfrak{a}$ ist ein surj. Ringhomom. mit Kern $\mathfrak{a}$.

Quiz / Beispiel: Quotienten von $\mathbb{Z}$

Geben Sie alle Quotienten des Rings $\mathbb{Z}$ an.

Quiz / Beispiel: Quotienten von $\mathbb{Z}$

Geben Sie alle Quotienten des Rings $\mathbb{Z}$ an.

- $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring, und für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $(n) = (-n)$
  - $n \geq 2$: $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/(-n) = \mathbb{Z}/n$ der Restklassenring mit n Elementen, den wir schon in der LA 1 konstruiert haben
  - $n = 1$: $\mathbb{Z}/(1) = \mathbb{Z}/(-1) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0\}$ der Nullring
  - $n = 0$: $\mathbb{Z}/(0)$ "$=$" $\mathbb{Z}$

Der Homomorphiesatz für Ringe

Satz Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi : R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion.
Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

(1) ("Universelle Eig. des Quotienten") Wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ ist, dann existiert ein eind. bestimmter Ringhomom $\varphi : R/\mathfrak{a} \to S$ mit $f = \varphi \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S \\ R/\mathfrak{a} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

(2) Existiert $\varphi : R/\mathfrak{a} \to S$ mit $f = \varphi \circ \pi$, so gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ und

- $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(f)$
- φ injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(f)$.

Quiz

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

$\mathrm{End}_K(V)$

$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$

Schreiben Sie den Ring $K[f]$ als den Quotienten des Polynomrings $K[X]$ nach einem geeigneten Ideal.

Quiz

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Schreiben Sie den Ring $K[f]$ als den Quotienten des Polynomrings $K[X]$ nach einem geeigneten Ideal.

$$X \longmapsto f$$

$$\begin{tikzcd}
K[X] \arrow[r, two heads, "\Phi"] \arrow[d] & K[f] \subseteq \mathrm{End}_K(V) \\
K[X]/\underbrace{\mathrm{Ker}(\Phi)}_{=(\mathrm{minpol}_f)} \arrow[ur, dashed, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow K[X]/(\mathrm{minpol}_f) \cong K[f].$$

Wiederholung: Der Dualraum
Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition des Dualraums

K Körper

V ein K-VR.

Dann heißt $V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum von V. (Auch: V^*)

$$\lambda, \mu \in \mathrm{Hom}_K(V,K) \qquad \begin{cases} (\lambda + \mu)(v) = \lambda(v) + \mu(v) \\ (a \cdot \lambda)(v) = a \cdot \lambda(v) & a \in K \end{cases}$$

Beispiel K^n

$$
\begin{aligned}
(K^n)^\vee = \operatorname{Hom}_K(K^n, K) &\overset{\text{Standardbasis}}{\cong} M_{1\times n}(K) \\
(\lambda : K^n \to K) &\longmapsto M(\lambda) \\
\lambda \qquad &\longmapsto (\lambda(e_1), \ldots, \lambda(e_n))
\end{aligned}
$$

Die duale Abbildung

K Körper $\quad V, W$ VR über K

Sei $f: V \to W$ ein Homomorphismus.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted] & W \arrow[d, "\mu"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Dann heißt
$$f^\vee : W^\vee \longrightarrow V^\vee$$
$$\mu \longmapsto \mu \circ f$$
die zu f duale Abbildung. Dies ist ein VR-Homomorphismus.

Die Konstruktion ist verträglich mit Verkettung: $\quad U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$

$\rightsquigarrow \quad f^\vee : W^\vee \to V^\vee, \quad g^\vee : V^\vee \to U^\vee, \qquad (f \circ g)^\vee = g^\vee \circ f^\vee$

Es gilt $(\mathrm{id}_V)^\vee = \mathrm{id}_{V^\vee}$. $\qquad$ (Also: f Isomorphismus $\Rightarrow$ $f^\vee$ Isomorphismus).

Die duale Basis

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionales K-VR,
$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.

Sei $b_i^\vee \in V^\vee$ gegeben durch $b_i^\vee(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann bilden $b_1^\vee, \ldots, b_n^\vee$ eine Basis von $V^\vee$, die sogenannte <u>duale Basis</u> der Basis $\mathcal{B}$. Bezeichnung: $\mathcal{B}^\vee = (b_1^\vee, \ldots, b_n^\vee)$.

<u>Insbes.</u>: Falls V endlichdim'l, dann $\dim V^\vee = \dim V$.

Die darstellende Matrix der dualen Abbildung

Sei K ein Körper, V, W endlichdim'l VR über K,
mit Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$
und seien $\mathcal{B}^\vee$, $\mathcal{C}^\vee$ die dualen Basen (von $V^\vee$, $W^\vee$).

Schreibe
$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$
$\mathcal{B}^\vee = (b_1^\vee, \dots, b_n^\vee)$
$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$
$\mathcal{C}^\vee = (c_1^\vee, \dots, c_m^\vee)$

Sei $f\colon V \to W$ ein VR-Homomorphismus, und $f^\vee\colon W^\vee \to V^\vee$ die dazu duale Abb.

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

__Satz.__ Es gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^t = M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee)$.

__Beweis__ Schreibe $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann

$$f^\vee(c_j^\vee) = \underbrace{c_j^\vee \circ f}_{} = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} ? \, b_\ell^\vee}_{}$$

b_i einsetzen: $c_j^\vee(f(b_i)) = c_j^\vee\left(\sum_\ell a_{\ell i} c_\ell\right) = a_{ji}$

b_i einsetzen: Koeff. von $b_i^\vee$

Injektivität/Surjektivität der dualen Abbildung

Seien K ein Körper, V, W VR über K, $f: V \to W$ ein Homomorphismus

Sei $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ die duale Abbildung zu f.

<u>Satz</u> (1) f injektiv $\iff$ $f^\vee$ surjektiv,

(2) f surjektiv $\iff$ $f^\vee$ injektiv.

Der Rang der dualen Abbildung

Seien K Körper, V, W endlichdimensional K-VR.

<u>Satz</u>. Sei $f: V \to W$ ein Homom. Dann gilt $\operatorname{rg}(f^\vee) = \operatorname{rg}(f)$.

<u>Beweis</u> Schreibe f als Verkettung: $V \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(f) \hookrightarrow W$

$\rightsquigarrow$ $f^\vee$ ist die Verkettung $W^\vee \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(f)^\vee \hookrightarrow V^\vee$,

also gilt $\operatorname{Im}(f^\vee) \cong \operatorname{Im}(f)^\vee$,

d.h. $\operatorname{rg}(f^\vee) = \dim \operatorname{Im}(f^\vee) = \dim(\operatorname{Im}(f)^\vee) = \dim \operatorname{Im}(f)$

$= \operatorname{rg}(f)$.

Der Doppeldualraum

Sei K ein Körper,
V ein K-Vektorraum.

Sei $V^{\vee\vee} := (V^\vee)^\vee = \mathrm{Hom}_K(V^\vee, K)$ der <u>Doppeldualraum</u> von V.

Haben "kanonische" Abbildung
$$V \longrightarrow V^{\vee\vee}$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} V^\vee \longrightarrow K \\ \lambda \longmapsto \lambda(v) \end{pmatrix}.$$

<u>Satz</u> Die kanonische Abbildung $V \to V^{\vee\vee}$ ist <u>injektiv</u>.
Wenn V endlichdimensional ist, dann ist sie ein Isomorphismus
$$V \cong V^{\vee\vee}.$$

Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Bilineare Abbildungen

Sei K ein Körper, V, W, U VR über K

Eine Abb. $V \times W \xrightarrow{b} U$ heißt <u>bilinear</u>, wenn

für alle $v_0 \in V$ und $w_0 \in W$ gilt:

die Abb. $\begin{aligned} W &\to U \\ w &\mapsto b(v_0, w) \end{aligned}$, $\begin{aligned} V &\to U \\ v &\mapsto b(v, w_0) \end{aligned}$ sind linear.

Konkret:

$b(v_0, aw + a'w') = a \cdot b(v_0, w) + a' b(v_0, w')$ b linear im zweiten Eintrag

$b(av + a'v', w_0) = a\, b(v, w_0) + a' b(v', w_0)$ b linear im ersten Eintrag

Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts

Def Seien K ein Körper und V, W VR über K. Ein Tensorprodukt von V und W über K ist ein K-VR T zusammen mit einer bilinearen Abb. $V \times W \xrightarrow{\beta} T$, so dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Für jeden K-VR U und jede bilineare Abb $V \times W \xrightarrow{b} U$ existiert genau eine lineare Abb. $T \xrightarrow{\varphi} U$, so dass

$$b = \varphi \circ \beta$$

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "b\ \text{bilinear}"] \arrow[d, "\beta\ \text{bilinear}"'] & U \\
T \arrow[ur, "\varphi\ \text{linear}"'] &
\end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten: Für jeden K-VR U ist die Abb.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(T, U) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_K(V \times W, U) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \beta \end{aligned}$$

bijektiv.

Existenz des Tensorprodukts

Satz Sind V, W VR über dem Körper K, dann existiert ein Tensorprodukt von V und W über K, und dieses ist eind. bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis Eindeutigkeit bis auf eind. Isom.: Sei $(T, \beta: V \times W \to T)$ und $(T', \beta': V \times W \to T')$ Tensorprodukt. Dann ex. ein eind. bestimmter Isomorphismus $\xi: T \to T'$, s.d.

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta'"] & \\ T \arrow[rr, "\xi"] & & T' \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. $\beta' = \xi \circ \beta$.

Diese Aussage folgt mit der üblichen Methode aus der universellen Eigenschaft.

Existenz des Tensorprodukts

Sei $S = K^{(V \times W)} = \bigoplus_{i \in V \times W} K$.

Wir haben Abb. $V \times W \xrightarrow{\alpha} S$

$(v, w) \longmapsto e_{(v,w)}$

"Standardbasisvektor", 1 an Index (v,w), 0 sonst.

(nicht bilinear!)

Sei $U \subseteq S$ der UVR von S, der erzeugt wird von allen Elementen

der Form

$$e_{(av + a'v', w)} - (a e_{(v,w)} + a' e_{(v',w)})$$

$$e_{(v, aw + a'w')} - (a e_{(v,w)} + a' e_{(v,w')})$$

für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $a, a' \in K$

Sei $T := S/U$. Dann ist die Abb. $\beta : V \times W \to S \to T$ bilinear.

<u>Behauptung</u> T mit $\beta : V \times W \to T$ ist ein Tensorprodukt.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"'] & X \\ T \arrow[ur, dotted, "\psi ?"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Begründung.</u> Sei $b : V \times W \to X$ eine bilineare Abb.

Jedenfalls kann es dann höchstens eine Abb $\psi : T \to X$ geben, so dass $\psi \circ \beta = b$.

Denn für das Bild $\overline{e_{(v,w)}}$ von $e_{(v,w)} \in S$ in T muss $\psi(\overline{e_{(v,w)}}) = b(v,w)$ $(*)$ gelten

und diese Elem. sind ein ES von T.

Jedenfalls ex. eine eind. best. lineare Abb. $\varphi : S \to X$

mit $\varphi(e_{(v,w)}) := b(v,w)$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
T \arrow[ur, dotted, "\psi ?"'] &
\end{tikzcd}
\qquad T = S/U
$$

Zur Konstruktion von ψ mit der Eigenschaft (*) ist nach dem Homomorphiesatz zu zeigen, dass $U \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Dazu genügt es zu zeigen, dass alle Elemente des oben gewählten ES von U unter φ auf Null abgebildet werden

Zum Beispiel $\varphi\left(e_{(av+av',w)} - \left(a \cdot e_{(v,w)} + a' e_{(v',w)}\right)\right)$

$$= \varphi(e_{(av+av',w)}) - a\,\varphi(e_{(v,w)}) - a'\,\varphi(e_{(v',w)})$$

$$= b(av+av',w) - a\,b(v,w) - a'\,b(v',w) = 0$$

Elementartensoren

Wir bezeichnen das Tensorprodukt von V und W über K mit $V \otimes_K W$.

Das Bild von $(v,w) \in V \times W$ unter der bilinearen Abb. $V \times W \xrightarrow{f} V \otimes_K W$ bezeichnen wir mit $v \otimes w$. Diese Elemente heißen Elementartensoren.

Rechenregeln für Elementartensoren:

f bilinear $\rightsquigarrow$

$$(v+v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w,$$

$$v \otimes (w+w') = v \otimes w + v \otimes w',$$

$$(av) \otimes w = a \cdot (v \otimes w)$$

$$v \otimes (aw) = a \cdot (v \otimes w)$$

$v, v' \in V$,
$w, w' \in W$,
$a \in K$

Quiz

Schreiben Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^2$$

als Elementartensor.

Quiz

Schreiben Sie

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^2\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^2$$

als Elementartensor.

$$= 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Achtung: Nicht jedes Element eines Tensorprodukts lässt sich als Elementartensor schreiben!

Quiz

Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K.

Seien $v \in V$, $w \in W$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $v \otimes w = 0 \quad (\text{in } V \otimes_K W)$,

(ii) für jede bilineare Abbildung $b\colon V \times W \to U$ in einen K-Vektorraum U gilt
$b(v, w) = 0$.

Quiz

Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K.

Seien $v \in V$, $w \in W$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $v \otimes w = 0 \quad$ (in $V \otimes_K W$),

(ii) für jede bilineare Abbildung $b\colon V \times W \to U$ in einen K-Vektorraum U gilt

$$b(v, w) = 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Gilt (i) und ist b gegeben, so betrachte

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"] & U \\ V \otimes_K W \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow b(v,w) = \varphi(\underbrace{\beta(v,w)}_{= v \otimes w}) = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Die Abb. $\beta: V \times W \to V \otimes_K W$ ist bilinear und

$$v \otimes w = \beta(v,w) \underset{(ii)}{=} 0.$$

Sehen später: $v \otimes w = 0 \iff v = 0$ oder $w = 0$.

Eigenschaften des Tensorprodukts
Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

$V \otimes_K W$ wird erzeugt von Elementartensoren

<u>Satz</u> K Körper, V, W VR über K.

Dann bilden die Elementartensoren $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$, ein Erzeugendensystem des Tensorprodukts $V \otimes_K W$.

<u>Beweis</u> • aus der Konstruktion eines Tensorprodukts $K^{(V \times W)} / U$.

• mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts:

Sei $T \subseteq V \otimes_K W$ der von den Elementartensoren erzeugte Untervektorraum.

Dann liegt das Bild der Abb. $V \times W \xrightarrow{\beta} V \otimes_K W$, $(v, w) \mapsto v \otimes w$, in T.

$V \otimes_K W$ wird erzeugt von Elementartensoren

Beh. T erfüllt die univ. Eig. des Tensorprodukts.

Begr.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "b"', "\text{bil.}"] \arrow[d] & U \\ T \arrow[ur, dotted, "\psi\,?"] & \\ V \otimes_K W \arrow[u, phantom, "\cong"] \arrow[uur, bend right, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Definiere ψ als $\varphi|_T$.

Es folgt dann, dass $T = V \otimes_K W$

Werden jetzt die univ. Eig mehrfach benutzen, um Abb. $V \otimes_K W \to U$ zu bestimmen, „irgendein K-VR"
indem wir bil. Abb. $V \times W \to U$ angeben, indem wir einen bil. Ausdruck als Bild der Elementartensoren von angeben.

Das Tensorprodukt von Homomorphismen

K K_p.

V, W, V', W' VR über K,

$f: V \to V'$, $g: W \to W'$ Homomorphismen

„U“

$\longrightarrow$ erhalte Homom. $f \otimes g : V \otimes_K W \longrightarrow V' \otimes_K W'$

$$v \otimes w \longmapsto \underbrace{f(v) \otimes g(w)}$$

Der Homom. $f \otimes g$ heißt das Tensorprodukt der Abb. f, g.

Die Konstruktion ist verträglich mit der Verkettung $\left((f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2) = (f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)\right)$,

und $id_V \otimes id_W = id_{V \otimes_K W}$.

dieser Ausdruck verhält sich bilinear in v, w

(d.h. die Abb.

$$V \times W \longrightarrow V' \otimes_K W'$$
$$(v, w) \longmapsto f(v) \otimes g(w)$$

ist bilinear)

Einfache Eigenschaften

Sei K ein Körper, U, V, W VR über K.

Dann hat man „kanonische" Isomorphismen

(1) $K \otimes_K W \xrightarrow{\sim} W, \quad a \otimes w \mapsto aw,$ Umkehrabb. $W \to K \otimes_K W.$
$w \mapsto 1 \otimes w$

(2) $V \otimes_K K \xrightarrow{\sim} V, \quad v \otimes a \mapsto av$

(3) $V \otimes_K W \xrightarrow{\sim} W \otimes_K V, \quad v \otimes w \mapsto w \otimes v,$

Umkehrabb.: $W \otimes_K V \to V \otimes_K W, \quad w \otimes v \mapsto v \otimes w,$

bil. in $u \otimes v$ und w

(4) $(U \otimes_K V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes_K (V \otimes_K W), \quad (u \otimes v) \otimes w \mapsto \overbrace{u \otimes (v \otimes w)}.$

(entsprechend für endliche Familien $V_1, \ldots, V_r$ von K-VR).

Tensorprodukt und Hom

(5) $$\mathrm{Hom}(V \otimes_K W, U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, U))$$

$$\varphi \longmapsto \big(v \mapsto (w \mapsto \varphi(v \otimes w))\big)$$

Umkehrabb.: $$\mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, U)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V \otimes_K W, U)$$

$$\psi \longmapsto \big(v \otimes w \mapsto \underbrace{\psi(v)(w)}_{\text{bilinear in } v,\, w}\big)$$

Tensorprodukt und direkte Summen

Sei K ein Körper, V und W_i, $i \in I$, VR über K.

Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$V \otimes_K \bigoplus_{i \in I} W_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i), \qquad v \otimes (w_i)_i \longmapsto (v \otimes w_i)_{i \in I}$$

Um zu sehen, dass dies ein Isomorphismus ist, kann man

- Umkehrhomomorphismus angeben, oder
- zeigen, dass $V \otimes_K \bigoplus_{i \in I} W_i$ die univ. Eigenschaft der direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i)$ erfüllt.

Tensorprodukt und direkte Summen

zz.: Gegeben eine Familie $V \otimes_K W_i \xrightarrow{f_i} U$,

dann ex. eine eind. best. Abb.

$$v \otimes (w_i)_i \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v \otimes w_i)$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes_K \bigoplus_{i\in I} W_i \arrow[r] & U \\
V \otimes_K W_i \arrow[u] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Eine Basis des Tensorprodukts

Seien K ein Körper, V, W VR über K

Sei $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, $(c_j)_{j\in J}$ eine Basis von W.

<u>Satz.</u> Dann bilden die Elemente $b_i \otimes c_j$, $i\in I$, $j\in J$, eine Basis des Tensorprodukt $V \otimes_K W$.

<u>Beweis</u> Die Basen von V und W liefern uns Koordinatenisomorphismen $V \xrightarrow{c_B} K^{(I)}$, $W \xrightarrow{c_C} K^{(J)}$. Damit erhalten wir

$$V \otimes_K W \xrightarrow[c_B \otimes c_C]{\sim} K^{(I)} \otimes_K K^{(J)} = \Big(\bigoplus_{i\in I} K\Big) \otimes K^{(J)} = \underbrace{\bigoplus_{i\in I} \underbrace{K \otimes_K K^{(J)}}_{K^{(J)}}}_{} = \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} K = K^{(I\times J)}$$

Eine Basis des Tensorprodukts

Erhalte also Isom. $\quad V \otimes_K W \xrightarrow{\sim} K^{(I \times J)}$

$$b_i \otimes c_j \longmapsto e_{(i,j)} \qquad (i,j) \in I \times J$$

<u>Korollar:</u> Sind V, W endlichdimensional, so gilt

$$\dim (V \otimes_K W) = \dim V \cdot \dim W.$$

<u>Korollar:</u> Für $v \in V$ und $w \in W$ gilt $\quad v \otimes w = 0 \iff v = 0$ oder $w = 0$.

Quiz

Geben Sie die horizontale Abbildung im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^2 \times K^3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & K^6 \\ & K^2 \otimes_K K^3 \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

„konkret“ an:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \mapsto$$

Quiz

Geben Sie die horizontale Abbildung im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^2 \times K^3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & K^6 \\ & K^2 \otimes_K K^3 \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

$(e_1, \dots, e_6)$

$\updownarrow$

$(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_3, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_2 \otimes e_3)$

„konkret“ an:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \mapsto (xa, xb, xc, ya, yb, yc)^t$$

Unter der Identifikation $K^2 \otimes_K K^3 = K^6$ „ist“ dieses Element der Elementartensor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel eines Tensorprodukts $V \otimes_K W$, in dem nicht jedes Element ein Elementartensor ist.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel eines Tensorprodukts $V \otimes_K W$, in dem nicht jedes Element ein Elementartensor ist.

- Einfachste Möglichkeit: K endlicher Körper mit q Elementen, $V = K^m$, $W = K^n$

  $\rightsquigarrow \quad \#(V \times W) = q^{m+n}, \qquad \#(V \otimes_K W) = q^{mn}$

  Jedenfalls dann, wenn $mn > m+n$ ist, kann nicht jedes Element von $V \otimes_K W$ im Bild der Abb. $V \times W \to V \otimes_K W$ liegen.

Achtung: Man kann hier nicht mit der Dimension arbeiten, weil die Abb. $V \times W \xrightarrow{\beta} V \otimes_K W$ nicht linear ist! Aus $\dim V \times W < \dim V \otimes_K W$ folgt daher nicht direkt, dass β nicht surjektiv ist.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel eines Tensorprodukts $V \otimes_K W$, in dem nicht jedes Element ein Elementartensor ist.

- Konkret: K Körper, $V = W = K^2$ mit Stdbasis e_1, e_2

Beh. $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in K^2 \otimes_K K^2$ lässt sich nicht als Elementartensor schreiben.

Begr. Angenommen, es wäre $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = v \otimes v'$.

Schreibe $v = a e_1 + b e_2$, $v' = a' e_1 + b' e_2$

$$\rightsquigarrow \quad e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = (a e_1 + b e_2) \otimes (a' e_1 + b' e_2) = aa'\, e_1 \otimes e_1 + ab'\, e_1 \otimes e_2 + ba'\, e_2 \otimes e_1 + bb'\, e_2 \otimes e_2$$

$e_i \otimes e_j$ Basis

$$\Rightarrow \quad \underbrace{aa' = 0}_{\text{also } a = 0 \text{ oder } a' = 0}, \quad ab' = 1, \quad ba' = 1, \quad bb' = 0$$

Das ist nicht möglich.

Das Tensorprodukt und die Spur

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensional K-VR.

Dann ist die Abb.

$$\begin{aligned} V^\vee \otimes_K V &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,V) \\ \lambda \otimes v &\longmapsto (x \mapsto \lambda(x)\cdot v) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> Wähle Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} K^n$. Erhalte

$$V^\vee \otimes_K V \cong V^\vee \otimes K^n \cong (V^\vee \otimes_K K)^n = (V^\vee)^n$$

$$= \mathrm{Hom}(V,K)^n \underset{\substack{\text{(univ. Eig. des} \\ \text{Produkts } K^n)}}{=} \mathrm{Hom}(V,K^n) \underset{V \cong K^n}{=} \mathrm{Hom}(V,V).$$

Nun prüft man noch, dass diese Kette von Isomorphismen als Verkettung die obige Abb hat.

<u>Kor.</u> K Körper, V ein endlichdim'l K-VR. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}_K(V) \arrow[dr, "\text{Spur}"'] & & V^\vee \otimes_K V \arrow[ll, "\Phi", "\sim"'] \arrow[dl, "ev"] & \lambda \otimes v \arrow[d, mapsto] \\ & K & & \lambda(v) \end{tikzcd}$$

kommutativ

<u>Beweis.</u> Sei $(b_1, \ldots, b_n) = \mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $\lambda \in V^\vee$, $v = \sum_j a_j b_j \in V$

Dann gilt $\quad \operatorname{Spur}\left(\Phi(\lambda \otimes v)\right) = \operatorname{Spur}\left(\underbrace{x \mapsto \lambda(x)\, v}\right)$

$$b_i \mapsto \lambda(b_i)\, v = \sum_j a_j \lambda(b_i)\, b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(b_i)$$

$$= \lambda\left(\sum a_i b_i\right) = \lambda(v) = \operatorname{ev}(\lambda \otimes v).$$

Erweiterung der Skalare

Sei K ein Körper, der Teilkörper eines Körpers L ist.

Beispiel: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Sei V ein K-VR.

Wir können L als K-VR auffassen.

$$\begin{tikzcd} L \times L \arrow[r] & L \\ K \times L \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[ur, "\text{Skalarmult.}"'] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Tensorprodukt $V \otimes_K L$

Satz Mit der Skalarmult.

$$L \times (V \otimes_K L) \longrightarrow V \otimes_K L, \quad (a, v \otimes b) \longmapsto v \otimes ab$$

wird $V \otimes_K L$ zu einem L-Vektorraum.

Man nennt $V \otimes_K L$ den L-VR, der aus V durch Erweiterung der Skalare von K auf L entsteht.

Satz Ist in der Situation $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis des K-VR V, dann bilden die Elemente $b_i \otimes 1 \in V \otimes_K L$ eine Basis des L-VR $V \otimes_K L$.

Insbes. gilt $\dim_L (V \otimes_K L) = \dim_K (V)$.

Die äußeren Potenzen eines Vektorraums

Vorlesungswoche 9

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Multilineare Abbildungen

Sei K ein Körper,
seien $V_1, \dots, V_r$, U VR über K.

<u>Def.</u> Eine Abb. $f: V_1 \times \dots \times V_r \longrightarrow U$ heißt multilinear, wenn f linear in jedem Eintrag ist:

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, av + a'v', v_{i+1}, \dots, v_r) = a\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_r) + a'\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_r).$$

<u>Bem</u> Ist $f: V_1 \times \dots \times V_r \to U$ multilinear, so ex. eine eind. bestimmte lineare Abb. $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_r \xrightarrow{\varphi} U$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_r \arrow[r, "f"] \arrow[d] & U \\ V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_r \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Alternierende multilineare Abbildungen

Sei K ein Körper,

seien V, U VR über K

Def. Eine multilineare Abb. $f: \overbrace{V \times \dots \times V}^{r \text{ Faktoren}} \to U$ heißt <u>alternierend</u>, wenn gilt: Sind $v_i \in V$, $i = 1, \dots, r$, und existieren $i \neq j$ mit $v_i = v_j$, so ist $f(v_1, \dots, v_r) = 0$.

Haben in der LA1 gesehen: Es gilt dann für alle $v_i \in V$, $\sigma \in S_r$:

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_r).$$

Die universelle Eigenschaft der äußeren Potenz

Def. Seien K ein Körper, V ein K-VR, $r \in \mathbb{N}$.

Ein K-VR Λ zusammen mit einer alt. multilin. Abb. $V^r \xrightarrow{\beta} \Lambda$ heißt r-te äußere Potenz von V, falls die folg. universelle Eigenschaft gilt:

Für alle K-VR U und alternierende multilin. Abb. $b: V^r \to U$ existiert eine eind. bestimmte <u>linear</u> Abb. $\varphi: \Lambda \to U$ s.d.

$$b = \varphi \circ \beta.$$

gesucht

alt. multilin.

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"'] & U \\
\Lambda^r V \arrow[ur, dotted, "\exists!\ \varphi \text{ linear}"'] &
\end{tikzcd}$$

"r-te äußere Potenz von V"

Existenz der äußeren Potenz

<u>Satz</u>. Die r-te äußere Potenz existiert für jeden K-VR V und jedes $r\in\mathbb{N}$ und ist eind. bestimmt bis auf eind. Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} & V^r \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p'"] & \\ \Lambda \arrow[rr, "\sim"] & & \Lambda' \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen "die" r-te äußere Potenz von V mit $\Lambda^r V$.

Das Bild von $(v_1,\dots,v_r)\in V^r$ in $\Lambda^r V$ schreiben wir

$v_1\wedge\dots\wedge v_r$ ("Dachprodukt").

<u>Beweis</u>
- Eindeutigkeit: "Standardargument" anhand der univ. Eigenschaft
- Existenz: Sei $V^{\otimes r} := \underbrace{V\otimes\dots\otimes V}_{r \text{ Faktoren}}$, $U = \langle v_1\otimes\dots\otimes v_r \,;\, v_i\in V, \text{ es ex. } i\neq j: v_i=v_j\rangle$

Dann ist $V^r\to V^{\otimes r}\to V^{\otimes r}/U$ alternierend multilin. und erfüllt die univ. Eig. der r-ten äußeren Potenz.

Quiz

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $n = \dim V$.

Begründen Sie: $(\bigwedge^n V)^\vee$ ist der Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V.

Quiz

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $n = \dim V$.

Begründen Sie: $\underbrace{(\bigwedge^n V)^\vee}_{\displaystyle \overset{\parallel}{\mathrm{Hom}_K(\Lambda^n V, K)}}$ ist der Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V.

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r] \arrow[d] & K \\ \Lambda^n V \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Nach der univ. Eigenschaft von $\Lambda^n V$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^n V, K) \longrightarrow \mathcal{D}_V := \{\underbrace{\text{alternierende multilin. Abb } V^n \to K}_{= \text{ Determinantenfunktion auf } V}\}$$

$$\psi \longmapsto \psi \circ \beta$$

eine Bijektion, also ein VR-Isomorphismus. $(\beta : V^n \to \Lambda^n V)$

Rechenregeln für Dachprodukte

$$\beta : V^r \longrightarrow \Lambda^r V$$
$$(v_1, \ldots, v_r) \longmapsto \beta(v_1, \ldots, v_r) =: v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$$

- multilinear

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge (av + a'v') \wedge \cdots \wedge v_r = a \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r)$$
$$+ a' (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v' \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r)$$

- alternierend

$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0$, wenn $i \neq j$ mit $v_i = v_j$ existieren

daraus folgt: $v_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{v_j}_{i} \wedge \cdots \wedge \underbrace{v_i}_{j} \wedge \cdots \wedge v_r = - v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$

und allgemeiner $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(r)} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, $\sigma \in S_r$.

Quiz

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \in \bigwedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Zeigen Sie (K ein Körper):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \in \bigwedge^2 K^3.$$

Quiz

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{=0} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} \in \bigwedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Zeigen Sie (K ein Körper):

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}\wedge\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2} \neq 0 \in \bigwedge^2 K^3.$$

$$\boxed{\begin{tikzcd} (K^3)^2 \arrow[r, "b"] \arrow[d] & K \\ \Lambda^2 K^3 \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}}$$

Es gibt eine alternierende multilin. Abb. $b: K^3 \times K^3 \to K$ mit $b(e_1, e_2) \neq 0$,

z.B. $b(v,w) := \det(v \mid w \mid e_3)$.

Die äußere Potenz von Homomorphismen

Seien V, W VR über K, $r \in \mathbb{N}$, $f: V \to W$ ein Homomorphismus.

Dann existiert eine eind. best. lineare Abb.

$$\Lambda^r f : \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^r W$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \longmapsto f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_r)$$

Begr. Wende univ. Eig. von $\Lambda^r V$ an mit:

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \Lambda^r W, \\ \Lambda^r V \arrow[ur, dashed, "\Lambda^r f"'] & \end{tikzcd}$$

$b(v_1, \dots, v_r) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_r)$

Diese Abb. b ist alternierend und multilinear.

Eine Basis der äußeren Potenz

$r \in \mathbb{N}$.

<u>Satz</u> Sei V ein endlich dim'l K-VR, $n = \dim V$, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V.

Dann bilden die Elemente $b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_r}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$

eine Basis von $\Lambda^r V$

Insbesondere: $\dim \Lambda^r V =$ Anzahl der r-elem. Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ $= \binom{n}{r}$,

z.B. $\dim \Lambda^0 V = 1$,

$\Lambda^r V = 0 \qquad r > n$

<u>Beweis</u> • Die angegebenen Elem. bilden ein Erzeugendensystem.

- Die Elem. der Form $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ erzeugen $\Lambda^r V$

- $v_1 \wedge \dots \wedge v_r = \left(\sum a_{1i} b_i\right) \wedge \left(\sum a_{2i} b_i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum a_{ri} b_i\right)$

$$= \dots$$

- Die angeg. Elemente sind linear unabhängig:

<u>Beh.</u> Sei $(i_1, \dots, i_r)$ mit $i_1 < \dots < i_r$. Dann ex. eine lin. Abb.

$\Lambda^r V \to K$ und für alle $(j_1 \dots j_r)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ gilt:

$$b_{j_1} \wedge \dots \wedge b_{j_r} \longmapsto \begin{cases} 1 & (i_1 \dots i_r) = (j_1 \dots j_r) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Begr. Sei $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\} =: \{i'_1, \dots, i'_{n-r}\}$

$\rightsquigarrow$ $b_{i_1}, \dots, b_{i_r}, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}}$ Basis von V

$\rightsquigarrow$ es ex. (eind. best.) Determinantenfunktion $\Delta : V^n \to K$

mit $\Delta(b_{i_1}, \dots, b_{i_r}, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}}) = 1$.

Dann ist $V^r \to K$, $(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_r, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}})$

eine alt. multilin. Abb. Wir erhalten so $\Lambda^r V \to K$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_r, b_{i'_1}, \dots, b_{i'_{n-r}})$$

mit der gewünschten Eigenschaft.

Die äußere Potenz und die Determinante eines Endomorphismus

<u>Satz</u> Sei V ein endl.-dim'l K-VR, $n = \dim V$. Dann ist $\dim \Lambda^n V = \binom{n}{n} = 1$.

$(\rightsquigarrow \operatorname{End}_K(\Lambda^n V) = K)$

Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

Dann ist $\Lambda^n f : \Lambda^n V \longrightarrow \Lambda^n V$ die Multiplikation

mit $\det(f)$.

<u>Beweis</u> Die Verkettung $\Delta : V^n \longrightarrow \Lambda^n V \overset{\sim}{=} K$ (wähle Isom) ist alternierend multilin.,

also eine Determinantenfunktion. Also $\Delta \circ f^n = \det(f) \cdot \Delta$

$$\begin{tikzcd}
(v_i)_i \arrow[d, mapsto] & V^n \arrow[r] \arrow[d, "f^n"'] & \Lambda^n V \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Lambda^n f"] & K \arrow[d, "\det(f)"] \\
(f(v_i))_i & V^n \arrow[r] & \Lambda^n V \arrow[r, "\sim"] & K
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \Lambda^n f \text{ "=" } \det(f)$.

Quiz

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \in \bigwedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Quiz

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} \quad \in \bigwedge^2 \mathbb{Q}^2.$$

Sei $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ der Homom.

mit $f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f(e_1) \wedge f(e_2)$$

$$= \det(f) \cdot e_1 \wedge e_2$$

$$= (-3) \cdot e_1 \wedge e_2$$

analog

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3 & -1\\3 & -2\end{pmatrix} \cdot e_1 \wedge e_2$$

$$= (-3) \cdot e_1 \wedge e_2$$

Die äußere Algebra

Sei K ein Körper, V ein K-VR.

Dann ist
$$\bigwedge V := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r V$$

zusammen mit der Multiplikation

$$\underbrace{(v_1 \wedge \dots \wedge v_r)}_{\in \bigwedge^r V \subseteq \bigwedge V} \cdot \underbrace{(w_1 \wedge \dots \wedge w_s)}_{\in \bigwedge^s V \subseteq \bigwedge V} = \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_s}_{\in \bigwedge^{r+s} V \subseteq \bigwedge V}$$

ein (i.a. nicht kommutativer) Ring, die sog. äußere Algebra von V