Übersicht
Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Überblick über die kommenden Wochen

ab Woche 9:

Dualraum (siehe Videos zu LA 1)

Der Quotientenvektorraum

Quotienten von Gruppen und Ringen

Universelle Eigenschaft des Quotienten und andere Universalkonstruktionen

↳ Tensorprodukt

↳ äußere Potenz eines VR ($\rightsquigarrow \det(f)$)

Bilinearformen, Euklidische (und unitäre) Vektorräume

Quotienten von Vektorräumen

K Körper, V K-VR, $U \subseteq V$ UVR

Ziel: konstruiere VR V/U zusammen mit surj. VR-Homom.

$$\pi : V \to V/U \quad \text{mit} \quad \mathrm{Ker}(\pi) = U$$

V/U Menge der "Nebenklassen" $\underset{v \in V}{v + U} = \{ v + u \, ; \; u \in U \}$

Der Homomorphiesatz („universelle Eigenschaft“ des Quotienten)

K Kp., V VR, $U \leq V$ UVR

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \\
& V/U \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

VR-Homomorphismus

Frage: Wann ex. $\varphi : V/U \to W$ mit $\varphi \circ \pi = f$?

Antwort (Homomorphiesatz):

φ existiert $\iff$ $\operatorname{Ker}(f) \supseteq U$

(und dann ist φ eind. bestimmt)

Nebenklassen in Gruppen, der Satz von Lagrange

G Gruppe, $H \subseteq G$ Untergr.

Frage: gibt es einen Gruppenhomom. $G \to G'$ mit $\mathrm{Kern} = H$

Antwort: nicht immer ...

VR

$v + U$ $\rightsquigarrow$

Gruppen

$$gH = \{ gh \,;\, h \in H \}$$

$$Hg = \{ hg \,;\, h \in H \}$$

<u>Satz</u> (Lagrange) Sei G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe.
Dann $\#H \mid \#G$.

Quotienten von Gruppen nach Normalteilern

Konstruiere $G \longrightarrow G/H$ Gruppenhomom. mit Kern $= H$, wenn H "Normalteiler" ist

Universelle Eigenschaft von Produkt und direkter Summe

Charakterisiere VR-Homom $W \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i$

bzw. $\bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow W$

Der Quotientenvektorraum
Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Quotienten von Vektorräumen: Einführung

K Körper

V ein K-VR, $U \subseteq V$ Untervektorraum.

Ziel: Konstruiere VR V/U "V modulo U"

zusammen mit einem surjektiven Homom. $\pi : V \to V/U$ mit $\operatorname{Ker}(\pi) = U$.

Vorüberlegg.: Ist π surj. mit $\operatorname{Ker}(\pi) = U$, dann gilt für $v, v' \in V$:

$$\pi(v) = \pi(v') \iff \pi(v - v') = 0 \iff v - v' \in U$$

$$\iff v' \in v + U = \{v + u ;\ u \in U\}$$

$$\iff v \in v' + U$$

m.a.W.: $\pi^{-1}(\pi(v)) = v + U$

Nebenklassen

K Kp., V VR, $U \subseteq V$ UVR.

Betrachte Äquivalenzrelation auf V: $\quad v \sim v' :\Longleftrightarrow v - v' \in U$

Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ ist

$$\{v' \in V;\ v \sim v'\} = \{v' \in V;\ v - v' \in U\} = v + U := \{v + u;\ u \in U\},$$

wir nennen $v + U$ die <u>Nebenklasse</u> von v modulo U.

<u>Bem</u> Für $v, v' \in V$ gilt:

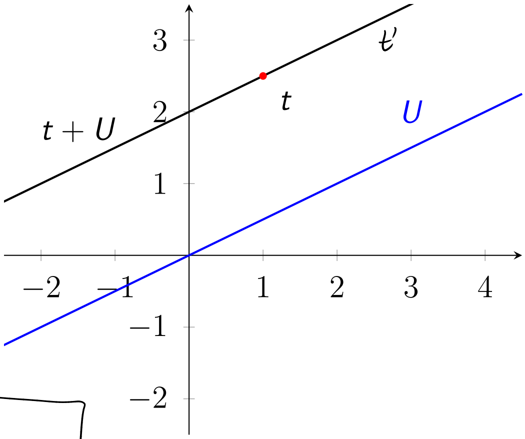
$$v + U = v' + U \Longleftrightarrow v \sim v' \Longleftrightarrow v - v' \in U \Longleftrightarrow v' \in v \in U.$$

$V = \mathbb{R}^2$

Im Bsp $V = \mathbb{R}^2$, U Ursprungsgerade

sind die Nebenklassen von U die

zu U parallelen Geraden.



Zurück zum allgemeinen Fall.

Sei V/U die Menge aller Nebenklassen.

Ziel: Definiere VR-Struktur auf V/U,

so dass $\pi : V \to V/U$, $v \mapsto v+U$, Homom.

Quiz

Was sagen Sie dazu:

Sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung $\frac{a}{b} \mapsto a$.

Sei $U = \langle e_1 + e_2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}^2$.

Sei $g\colon \mathbb{Q}^2/U \to \mathbb{Q}$ die Abbildung $(v_1, v_2)^t + U \mapsto v_1$.

Quiz

Was sagen Sie dazu:

Sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ die ~~Abbildung~~ $\frac{a}{b} \mapsto a$.

KEINE ABBILDUNG:

$\frac{1}{2} \longmapsto 1$

$\|$

$\frac{2}{4} \longmapsto 2$

↯

Sei $U = \langle e_1 + e_2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}^2$.

Sei $g\colon \mathbb{Q}^2/U \to \mathbb{Q}$ die ~~Abbildung~~ $(v_1, v_2)^t + U \mapsto v_1$.

KEINE ABBILDUNG:

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + U \longmapsto 1$

$\|$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + U \longmapsto 0$

Addition von Nebenklassen

K Kp., V VR, $U \le V$ UVR

Ziel VR-Struktur auf V/U, s.d. $\pi: V \to V/U$, $v \mapsto v+U$, Homom.,

(d.h. $\pi(v+v') = \pi(v) + \pi(v')$, wollen also: $(v+U) + (v'+U) := (v+v') + U$)

Lemma Die Zuordnungsvorschrift $(v+U) + (v'+U) := (v+v') + U$ liefert eine wohlbestimmte Abb. $+ : V/U \times V/U \to V/U$ ("ist wohldefiniert").

Beweis zu zeigen: falls $v+U = w+U$, $v'+U = w'+U$, so gilt
$$(v+v') + U = (w+w') + U$$

In diesem Fall gilt $v - w \in U$, $v' - w' \in U$,

also $(v+v') - (w+w') = (v-w) + (v'-w') \in U$ (U UVR!)

d.h. $\quad (v+v') + U = (w+w') + U .$

Skalarmultiplikation

K, $V \supseteq U$

Lemma. Die Vorschrift $a \cdot (v+U) := (av) + U$ ist wohldefiniert, definiert daher eine Abbildung $K \times V/U \to V/U$.

Beweis zz: ist $v + U = w + U$, $a \in K$, so gilt $(av) + U = (aw) + U$.

In der Tat, $v + U = w + U \Rightarrow v - w \in U \Rightarrow av - aw = a(v-w) \in U$,

also $av + U = aw + U$.

Der Quotientenvektorraum

Def / Satz Die Menge V/U der Nebenklassen von U in V mit den oben definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist ein K-Vektorraum, und die Abbildung $\pi : V \to V/U$, $v \mapsto v+U$, ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\mathrm{Ker}(\pi) = U$.
Wir nennen V/U den Quotienten von V modulo U und π die kanonische Projektion.

Beweis Um die VR-Axiome können wir ausnutzen, dass π eine surjektive Abb. ist, für die $\pi(v+v') = \pi(v) + \pi(v')$ und $\pi(av) = a\pi(v)$ gilt ($\forall v, v' \in V$, $a \in K$).

z.B. $+$ kommutativ: $\pi(v) + \pi(v') = \pi(v+v') = \pi(v'+v) = \pi(v') + \pi(v)$.

Neutrales Elem bzgl $+$ ist $0 + U = U$.

Offenbar ist π ein Homomorphismus, und $\pi(v) = 0 \iff v + U = 0 + U \iff v \in U$,
also $\mathrm{Ker}(\pi) = U$.

Beispiele

$K, \quad V \supseteq U$

(1) Ist $U = 0$, so ist $v - v' \in U \iff v = v'$, also haben alle Nebenkl. von U genau ein Element. Die kanon. Proj. $V \to V/0$ ist ein Isomorphismus. Können also $V/0$ identifizieren mit V.

(2) Ist $U = V$, so gibt es nur eine einzige Nebenklasse, also ist $V/V = 0$

(Nullvektorraum)

(3) Sei $U \subseteq V$ ein UVR und sei $W \subseteq V$ ein Komplement von U. Dann ist die Verkettung $f : W \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} V/U$ ein Isomorphismus.

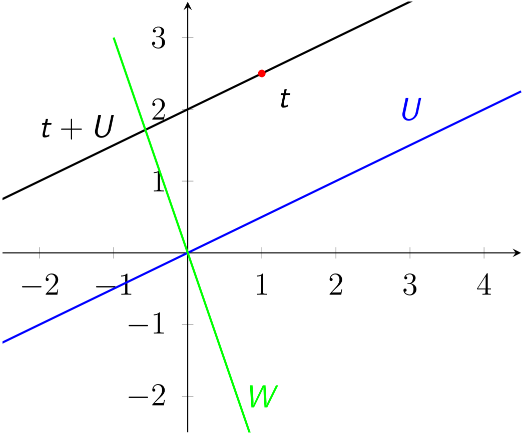
In der Tat gilt $\ker(f) = W \cap U = 0$, also ist f injektiv.

Außerdem gilt für $v \in V$,
$v = u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$:

$f(w) = w + U = (u+w) + U$.

Also ist f surjektiv

Jede Nebenklasse von U
schneidet W in genau
einem Punkt.



Quiz

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.
Sei $\pi\colon V \to V/U$ die kanonische Projektion.

Für $v_1, \dots, v_r \in V$ sind die Elemente $\pi(v_1), \dots, \pi(v_r)$ genau dann eine Basis von V/U, wenn $v_1, \dots, v_r$ ...

Quiz

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.
Sei $\pi\colon V \to V/U$ die kanonische Projektion.

Für $v_1, \ldots, v_r \in V$ sind die Elemente $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_r)$ genau dann eine Basis von V/U, wenn $v_1, \ldots, v_r$ ...

$\pi(v_1), \ldots, \pi(v_r)$ linear unabh. $\longleftrightarrow$ $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind und $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \cap U = 0$ gilt

$\pi(v_1), \ldots, \pi(v_r)$ Erzeugendensystem $\longleftrightarrow$ und $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle + U = V$ ist

$\Longleftrightarrow$ $v_1, \ldots, v_r$ bilden eine Basis eines Komplements von U

Der Homomorphiesatz für Vektorräume
Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Quotienten von Vektorräumen

K Körper, V Vektorraum über K
$U \leq V$ Untervektorraum

$v \in V \rightsquigarrow v + U = \{v + u;\ u \in U\} = \{v' \in V;\ v - v' \in U\}$ Nebenklasse von v modulo U

$V/U :=$ Menge aller Nebenklassen

$(v + U = v' + U \iff v - v' \in U)$

VR-Struktur:

$$(v+U) + (v'+U) = (v+v') + U, \quad v, v' \in V$$
$$a \cdot (v+U) = (av) + U \quad a \in K$$

wohldefiniert

Kanonische Projektion: $\pi : V \to V/U$ surjektiv mit Kern U.
$v \mapsto v + U$

Quiz

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Dann gilt $\qquad \dim(V/U) =$

Quiz

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Dann gilt $\quad \dim(V/U) = \dim V - \dim U$

Beweis: Dimensionsformel für lineare Abbildungen für $\pi : V \to V/U$

Alternativ: $W \subseteq U$ Komplementärraum zu U $\rightsquigarrow$ $W \to V \to V/U$ Isomorphismus

Also $\dim V/U = \dim W = \dim V - \dim U.$

Der Homomorphiesatz

K Kp., $U \subseteq V$ UVR

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\varphi ?"'] & \end{tikzcd}$$

„Wann existiert φ s.d. $\varphi \circ \pi = f$?“

Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus.

(1) Wenn $\mathrm{Ker}(f) \supseteq U$, dann existiert eine eind. best. linear Abb. $\varphi : V/U \to W$, so dass $\varphi \circ \pi = f$.

(2) Wenn $\varphi : V/U \to W$ mit $\varphi \circ \pi = f$ ex., dann gilt $\mathrm{Ker}(f) \supseteq U$.

(3) In diesem Fall ist $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(f)$,

und φ injektiv $\iff \mathrm{Ker}(f) = U$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\varphi\ (?)"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. (1) Es gelte $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Jedenfalls muss für $v \in V$ gelten: $\underbrace{\varphi(\pi(v))}_{\varphi(v+U)} = f(v)$,

insbes. ist φ eind. bestimmt (wenn es existiert).

Wollen definieren: $\varphi(v+U) := f(v)$

Müssen überprüfen: falls $v+U = w+U$, so gilt $f(v) = f(w)$.

Aber $v+U = w+U \Rightarrow v-w \in U \underset{U \subseteq \mathrm{Ker}(f)}{\Rightarrow} f(v-w) = 0 \Rightarrow f(v) = f(w)$.

bzz: φ Homomorphismus.

Das ist einfach, z.B. $\varphi((v+U)+(v'+U)) = \varphi((v+v')+U) = f(v+v') = f(v)+f(v') = \varphi(v+U) + \varphi(v'+U)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & W \\ & V/U \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>zu (2).</u> Wenn $\varphi : V/U \to W$ ex. mit $\varphi \circ \pi = f$,

und $u \in U$, dann gilt $f(u) = \varphi(\pi(u)) = \varphi(0) = 0$.

Also $\mathrm{Ker}(f) \supseteq U$.

<u>zu (3)</u> Dass $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(f)$ ist, folgt direkt aus $\varphi \circ \pi = f$ und daraus, dass π surjektiv ist.

Noch zz: φ injektiv $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = U$.

Dazu sei $v \in V$. Dann gilt

$$\underbrace{\varphi(v+U)}_{f(v)} = 0 \iff v \in \mathrm{Ker}(f) \quad \text{und} \quad v+U = 0 \iff v \in U$$

Die universelle Eigenschaft des Quotienten

Wenn $\mathrm{Ker}(f) \supseteq U$, dann existiert eine eind. best. lineare Abb. $\varphi: V/U \to W$, so dass $\varphi \circ \pi = f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

ex. eind. gdw. $\mathrm{Ker}(f) \supseteq U$

M. a. W.

$$\mathrm{Hom}_k(V/U, W) \longrightarrow \left\{ f: V \to W;\ U \subseteq \mathrm{Ker}(f) \right\}$$

Bijektion für alle W

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \pi$$

Korollar: $V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{im}(f)$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{im}(f) \subseteq W \\
V/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, dashed, "\sim"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sei $f: V \to W$ ein VR-Homomorphismus.

Dann induziert f einen Isomorphismus

$$V/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f).$$

Bem. Wenn man die Formel $\dim V/U = \dim V - \dim U$ beweist, ohne die Dimensionsformel zu benutzen, dann erhält man mit diesem Korollar einen neuen Beweis der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

Induzierter Endomorphismus $V/U \to V/U$

K Körper, V VR, $U \leq V$ UVR, $f: V \to V$ Endomorphismus.

Es gilt $f(U) \subseteq U$.

Dann existiert ein eind. bestimmter Endomorphismus $\bar{f}: V/U \to V/U$, so dass $\bar{f} \circ \pi = \pi \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\
V/U \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & V/U
\end{tikzcd}$$

__Begründung__. Wende Homomorphiesatz an auf

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi \circ f"] \arrow[d, "\pi"'] & V/U \\
V/U \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ genügt zu zeigen, dass $U \subseteq \mathrm{Ker}(\pi \circ f)$.

Das ist klar, denn $f(U) \subseteq U$ und $\mathrm{Ker}(\pi) = U$.

Nebenklassen in Gruppen
Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Links- und Rechtsnebenklassen

$V \supseteq U \rightsquigarrow$ Nebenkl.
$v + U = \{v+u \,;\, u \in U\}$

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

Def. Für $g \in G$ heißt $gH = \{gh \,;\, h \in H\}$ $\subseteq G$ die <u>Linksnebenklasse</u> (von g bezüglich H in G) und

$Hg = \{hg \,;\, h \in H\}$ die <u>Rechtsnebenklasse</u> von g

Wir bezeichnen mit G/H die Menge aller Linksnebenklassen und mit $H \backslash G$ die Menge aller Rechtsnebenklassen.

Bem. (1) Die Linksnebenklassen bezüglich $H \subseteq G$ sind genau die Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\quad g \sim g' :\iff g^{-1} \cdot g' \in H$

$$\left(\iff (g')^{-1} \cdot g \in H \right)$$

Insbesondere gilt für Elem. $g, g' \in G$:

entweder $\quad gH = g'H \quad$ oder $\quad gH \cap g'H = \emptyset$.

(2) Sind $g, g' \in G$, so ist die Abb.
$$\begin{aligned} gH &\longrightarrow g'H \\ x &\longmapsto \underbrace{g'g^{-1}x}_{\in H} \end{aligned}$$
eine Bijektion mit Umkehrabb. $x \mapsto g(g')^{-1}x$.

Quiz

$\mathrm{Bij}(\{1,2,3\})$

$\mathrel{/\!/}$

Sei $G = S_3$, $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$.

Bestimmen Sie alle Linksnebenklassen von H und alle Rechtsnebenklassen von H.

Quiz

Sei $G = S_3$, $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$.

Bestimmen Sie alle Linksnebenklassen von H und alle Rechtsnebenklassen von H.

- $H = \mathrm{id} \cdot H = (12) \cdot H$
- $(23) \cdot H = (23)(12) \cdot H = \{(23), \underbrace{(23)(12)}_{= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}\}$
- $(13) \cdot H = (13)(12) \cdot H = \{(13), \underbrace{(13)(12)}_{= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}\}$

- $H = H \cdot \mathrm{id} = H \cdot (12)$
- $H \cdot (23) = H \cdot (12)(23) = \{(23), \underbrace{(12)(23)}_{= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}\}$
- $H \cdot (13) = H \cdot (12)(13) = \{(13), \underbrace{(12)(13)}_{= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}\}$

Der Satz von Lagrange

<u>Satz</u> Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

Dann gilt $\# G = \# H \cdot \underbrace{\#(G/H)}$

"Index von H in G"
$[G:H]$

Insbesondere ist $\# H$ ein Teiler von $\# G$.

<u>Beweis.</u> Die Gruppe ist die disjunkte Vereinigung aller Linksnebenklassen. Es gibt $\#(G/H)$ Linksnebenklassen, und je zwei Linksnebenklassen haben gleich viele Elemente (da eine Bijektion dazwischen existiert). Da $H = 1 \cdot H$ eine der Linksnebenklassen ist, handelt es sich immer um $\# H$ Elemente.

Die Ordnung eines Elements

Sei G eine (mult. geschr.) Gruppe, $g \in G$.

Es sei $\underbrace{\operatorname{ord}(g) := \# \langle g \rangle}_{\in\, \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$, $\langle g \rangle = \{ g^i ;\ i \in \mathbb{Z} \}$ die von g erzeugte Untergruppe

Ist $\operatorname{ord}(g) \in \mathbb{N}$, also $\langle g \rangle$ eine endliche Gruppe, so ist

$$\langle g \rangle = \{ 1, g, g^2, \dots, \underbrace{g^{\operatorname{ord}(g)-1}}_{= g^{-1}} \} \quad \text{und} \quad g^{\operatorname{ord}(g)} = 1 .$$

Ist G endlich, so folgt aus dem Satz von Lagrange, dass $\operatorname{ord}(g) = \#\langle g\rangle \mid \#G$

und insbesondere $$g^{\#G} = 1 .$$

Quiz

Beweisen Sie den „Kleinen Satz von Fermat“:

Ist $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$, so gilt $a^p \equiv a \mod p$.

Ist der Satz auch ohne die Voraussetzung, dass p eine Primzahl sei, richtig?

Quiz

Beweisen Sie den „Kleinen Satz von Fermat“:

1. Fall $p \mid a \rightsquigarrow a \equiv 0 \equiv a^p \mod p$

2. Fall $p \nmid a \rightsquigarrow \bar{a} \in \underbrace{(\mathbb{Z}/p)^\times}_{p-1 \text{ Elemente}}$

$\Rightarrow \bar{a}^{p-1} = 1$ in $(\mathbb{Z}/p)^\times$

$\Rightarrow \bar{a}^p = \bar{a}$ in $\mathbb{Z}/p$

Ist $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$, so gilt $a^p \equiv a \mod p$.

Ist der Satz auch ohne die Voraussetzung, dass p eine Primzahl sei, richtig?

Nein, zum Beispiel $2^4 \equiv 0 \not\equiv 2 \mod 4$. ($\mathbb{Z}/4$ kein Integritätsring),

$3^4 \equiv (-1)^4 = 1 \not\equiv 3 \mod 4$ ($\#(\mathbb{Z}/4)^\times = 2 \neq 4-1$ ...).

Der Quotient einer Gruppe nach einem Normalteiler
Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Vorüberlegung Quotienten von Gruppen

G (mult. geschr.) Gruppe, $H \leq G$ Untergruppe

$\rightsquigarrow$ G/H Menge der Linksnebenklassen.

Ziel/Frage: Kann G/H so mit einer Gruppenstruktur versehen werden, dass $G \xrightarrow{\pi} G/H$, $g \mapsto gH$, ein Gruppenhomom. ist.

$\leftrightsquigarrow$ ist die Vorschrift $(g_1 H) \cdot (g_2 H) := (g_1 g_2) \cdot H$ wohldefiniert?

(also: folgt aus $g_1 H = g_1' H$, $g_2 H = g_2' H$, dass $g_1 g_2 H = g_1' g_2' H$?)

Normalteiler

Def. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt <u>Normalteiler</u>, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i) für alle $h \in H$ und $g \in G$ gilt $ghg^{-1} \in H$

(ii) für alle $g \in G$ gilt: $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} ; h \in H\} = H$

(iii) für alle $g \in G$ gilt $gH = Hg$.

Quiz

Welche der folgenden Untergruppen sind Normalteiler?

$\{\mathrm{id}, (12)\} \subset S_3$.

$\{\mathrm{id}, (123), (321)\} \subset S_3$.

K ein Körper, $n > 2$,
$D = \{A \in GL_n(K);\ A \text{ Diagonalmatrix}\} \subset GL_n(K)$

$n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

Quiz

Welche der folgenden Untergruppen sind Normalteiler?

$\{\mathrm{id}, (12)\} \subset S_3$. ✗ ($(23) \cdot \{\mathrm{id}, (12)\} \neq \{\mathrm{id}, (12)\} \cdot (23)$, siehe vorheriges Video)

$\{\mathrm{id}, (123), (321)\} \subset S_3$. ✓ Allgemein gilt: hat $H \leq G$ nur zwei Nebenklassen, dann ist H Normalteiler

K ein Körper, $n > 2$,
$D = \{A \in GL_n(K);\ A \text{ Diagonalmatrix}\} \subset GL_n(K)$ ✗

Es gibt Matrizen, die diagonalisierbar, aber keine Diagonalmatrizen sind
$\leadsto$ im allg. ist $gDg^{-1} \neq D$

(Ausnahme: $K = \mathbb{F}_2$, in diesem Fall ist $D = \{E_n\}$ ...)

$n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ✓

In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler.

Kerne sind Normalteiler

<u>Lemma</u> Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomom.

Dann ist $\operatorname{Ker}(f) \subseteq G$ ein Normalteiler.

<u>Beweis</u> Seien $g \in G$, $h \in \operatorname{Ker}(f)$. Dann gilt

$$f(ghg^{-1}) = f(g) \underbrace{f(h)}_{=1} f(g)^{-1} = f(g) f(g)^{-1} = 1,$$

also $ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}(f)$.

Quotienten von Gruppen nach Normalteilern

Seien G eine Gruppe und $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

Dann ist die Abb.
$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g_1H, g_2H) &\longmapsto g_1g_2H \end{aligned}$$
wohldefiniert,

und definiert auf G/H die Struktur einer Gruppe.

Die Abbildung $\pi : G \to G/H$, $g \mapsto gH$, ist ein surjektiver Gruppenhomom. mit $\ker(\pi) = H$.

Beweis der Wohldefiniertheit: Gelte $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$

zu zeigen: $g_1g_2H = g_1'g_2'H$.

Es folgt dann $g_1^{-1} g_1' \in H$, $g_2^{-1} g_2' \in H$, also

$$(g_1 g_2)^{-1} g_1' g_2' = g_2^{-1} g_1^{-1} g_1' g_2' = \underbrace{g_2^{-1} \underbrace{g_1^{-1} g_1'}_{\in H} g_2}_{\in H \text{ (weil } H \text{ Normalteiler)}} \underbrace{g_2^{-1} g_2'}_{\in H} \in H$$

Die Gültigkeit der Gruppenaxiome folgt aus den Gruppenaxiomen für G "mithilfe der surj. Abb. $\pi : G \to G/H$":

- Assoziativgesetz $\big((g_1 H)(g_2 H)\big)(g_3 H) = (g_1 g_2)H \cdot (g_3 H) = (g_1 g_2) g_3 H$
$$= g_1 (g_2 g_3) H = \dots = (g_1 H) \cdot \big((g_2 H)(g_3 H)\big)$$

- $1 \cdot H = H$ ist neutrales Elem., • für $g \in G$ ist $g^{-1} H$ invers zu gH.

Ebenso ist klar, dass π surj. Gruppenhomom. mit Kern H ist.

Der Homomorphiesatz für Gruppen

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Sei $\pi: G \to G/H$ wie oben („kanonische Projektion")

Sei T eine Gruppe und $f: G \to T$ ein Gruppenhomomorphismus.

„universelle Eigenschaft des Quotienten"

(1) Wenn $H \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, dann ex. ein eind. best. Gruppenhomomorphismus

$$G/H \xrightarrow{\varphi} T \quad \text{mit} \quad \varphi \circ \pi = f$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & T \\ G/H \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

(2) Wenn φ mit $\varphi \circ \pi = f$ existiert, so gilt $H \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

In dieser Situation gilt: $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(f)$

und φ injektiv $\iff \mathrm{Ker}(f) = H$.

__Bem.__ Ist G kommutativ, dann ist jede Untergruppe $H \subseteq G$ ein Normalteiler

und G/H ist auch eine kommutative Gruppe.

Die universelle Eigenschaft von Produkt und direkter Summe
Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Sprechweise *Kommutatives Diagramm*

Diagramm: "Objekte + Abbildungen"

Ein Diagramm heißt <u>kommutativ</u>, wenn alle Verkettungen vom selben Definitionsbereich zum selben Ziel <u>dieselbe Abbildung</u> sind

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & V \\ & W \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ:

$$f = h \circ g$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, bend left=90, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "b"'] & V \end{tikzcd}$$

kommutativ:

$$g \circ a = b \circ f = h$$

Erinnerung: Produkt und direkte Summe von Vektorräumen

K Körper, I eine Menge, V_i, $i \in I$, Vektorräume über K.

- Produkt $\quad \prod_{i\in I} V_i := \{ (v_i)_{i\in I} \,;\, v_i \in V_i \}$ mit komponentenweiser Addition, Skalarmult.

$\quad\quad \cup\!| \quad$ UVR

- direkte Summe $\quad \bigoplus_{i\in I} V_i := \{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \,;\,$ für höchstens endlich viele $i \in I$ ist $v_i \neq 0 \}$

Inklusionsabbildung $\quad\quad$ Projektion

Homomorphismen

$$V_j \xhookrightarrow{\iota_j} \bigoplus_{i\in I} V_i, \qquad \prod_{i\in I} V_i \xrightarrow{\pi_j} V_j$$

$$v \longmapsto (0,\dots,0,\underset{j}{v},0\dots0) \qquad (v_i)_{i\in I} \longmapsto v_j$$

Quiz

Seien V_i, $i \in I$ und W Vektorräume, $p_i \colon W \to V_i$ Homomorphismen.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Homomorphismus

$$\varphi \colon W \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i$$

so dass $\pi_i \circ \varphi = p_i$ für alle i. Geben Sie φ an.

Quiz

Seien V_i, $i \in I$ und W Vektorräume, $p_i\colon W \to V_i$ Homomorphismen.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Homomorphismus

$$\varphi\colon W \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i$$

so dass $\pi_i \circ \varphi = p_i$ für alle i. Geben Sie φ an.

$$\varphi(w) = \big(p_i(w)\big)_{i \in I}$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_j"'] & & \prod\limits_{i \in I} V_i \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& V_j &
\end{tikzcd}$$

(für alle j kommutativ)

Die universelle Eigenschaft des Produkts

Seien K ein Körper, I eine Menge, V_i, $i \in I$, K-VR

Ist W ein K-VR mit Homomorphismen $p_i : W \to V_i$, $i \in I$, dann existiert genau ein Homomorphismus $\varphi : W \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i$, so dass für alle $i \in I$ gilt: $\pi_i \circ \varphi = p_i$.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_j"'] & & \prod_{i \in I} V_i \arrow[dl, "\pi_j \text{ Projektion}"] \\
& V_j &
\end{tikzcd}
$$

Eindeutige Charakterisierung durch die universelle Eigenschaft

Seien K ein Körper, I eine Menge, V_i, $i \in I$, eine Familie von K-VR.

<u>Satz</u>. Ist P ein VR über K zusammen mit Homomorphismen $p_i : P \to V_i$,

so dass gilt:

Für jeden K-VR W zusammen mit VR-Homom. $q_i : W \to V_i$ existiert genau ein Homom. $\varphi : W \to P$, für den $q_j = p_j \circ \varphi \quad \forall j \in I$ gilt.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q_j"'] & P \arrow[dl, "p_j"] \\ V_j & \end{tikzcd}$$

„P erfüllt die universelle Eig. des Produkts“

Dann existiert ein eindeutig bestimmter VR-Isomorphismus $P \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} V_i$,

so dass $p_j = \pi_j \circ \alpha$ für alle $j \in I$.

Beweis 1. Schritt Konstruktion einer Abb. $\alpha : P \to \prod_{i\in I} V_i$.

Verwende die universelle Eigenschaft von $\prod_{i\in I} V_i$: P zusammen mit den

Homom. $p_j : P \to V_j$ liefert einen eind. best. Homom. $\alpha : P \to \prod_{i\in I} V_i$

so dass $p_j = \pi_j \circ \alpha$ $\quad [x \mapsto (p_i(x))_{i\in I}]$

2. Schritt Konstruktion einer Abb. $\beta : \prod_{i\in I} V_i \to P$.

Verwende die universelle Eig. von P : $\prod_{i\in I} V_i$ zusammen mit den

Homom. $\pi_j : \prod_{i\in I} V_i \to V_j$ liefert einen eind. best. Homom. $\beta : \prod_{i\in I} V_i \to P$

so dass $\pi_j = p_j \circ \alpha$

3. Schritt $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\prod_{i \in I} V_i}$.

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p_j"] & \prod_{i\in I} V_i \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& V_j &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} V_i \arrow[rr, "\alpha\circ\beta"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & & \prod_{i\in I} V_i \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& V_j &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
\prod V_i \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & & \prod V_i \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& V_j &
\end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eig. des Produkts folgt

dann $$\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\prod_{i \in I} V_i}.$$

<u>4. Schritt</u> $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_P$. (Selbes Argument wie in Schritt 3 mit P an der Stelle von $\prod_{i \in I} V_i$.)

Quiz

Seien V_i, $i \in I$ und W Vektorräume, $f_i \colon V_i \to W$ Homomorphismen.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Homomorphismus

$$\varphi\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow W$$

so dass $\varphi \circ \iota_i = f_i$ für alle i. Geben Sie φ an.

Quiz

Seien V_i, $i \in I$ und W Vektorräume, $f_i \colon V_i \to W$ Homomorphismen.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Homomorphismus

$$\varphi \colon \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow W$$

so dass $\varphi \circ \iota_i = f_i$ für alle i. Geben Sie φ an.

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{i\in I} V_i \arrow[rr, "\varphi"] & & W \\ & V_j \arrow[ul, "\iota_j"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

$$\varphi\Big(\underbrace{(v_i)_{i\in I}}_{= \sum_{i\in I} \iota_i(v_i)}\Big) = \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

Die universelle Eigenschaft der direkten Summe

K Körper, I Menge, V_i, $i \in I$, Vektorräume über K.

$\iota_j : V_j \to \bigoplus_{i \in I} V_i$

Inklusion

Ist W ein K-VR zusammen mit Homomorphismen

$f_i : V_i \to W$, so existiert ein eind. bestimmter

Homomorphismus $\bigoplus_{i \in I} V_i \xrightarrow{\varphi} W$,

so dass $f_j = \varphi \circ \iota_j$ für alle j gilt.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_i \arrow[rr] & & W \\
& V_j \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Eindeutige Charakterisierung durch die universelle Eigenschaft

K Körper, I Menge, V_i, $i \in I$, eine Familie von VR

<u>Satz</u> Sei S ein K-VR zusammen mit Abb. $s_i : V_i \to S$, so dass gilt:

Ist W ein VR zusammen mit Homomorphismen $f_i : V_i \to W$, $i \in I$, so existiert ein eind. best. Homom.

$$S \xrightarrow{\varphi} W$$

mit $f_j = \varphi \circ s_j$ für alle $j \in J$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] & & W \\ & V_j \arrow[ul, "s_j"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

„S erfüllt die universelle Eigenschaft der direkten Summe"

Dann ex. ein eind. bestimmter Isom. $\alpha : S \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit $\iota_j = \alpha \circ s_j$ für alle $j \in I$.

<u>Beweis</u> analog zum Produktfall:

- univ. Eig von $\bigoplus_{i\in I} V_i$ $\rightsquigarrow$ $\bigoplus_{i\in I} V_i \xrightarrow{\beta} S$

- univ. Eig von S $\rightsquigarrow$ $S \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i\in I} V_i$

- $$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} V_i \arrow[rr, shift left, "\alpha\circ\beta"] \arrow[rr, shift right, "id"'] & & \bigoplus_{i\in I} V_i \\
& V_j \arrow[ul, "\iota_j"] \arrow[ur, "\iota_j"'] &
\end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ (Eindeutigkeit in univ. Eig von $\bigoplus V_i$) $\alpha\circ\beta = id$

- analog: $\beta\circ\alpha = id$.

Vergleich

Produkt

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p_j"'] & & \prod\limits_{i\in I} V_i \arrow[dl, "\pi_j"] \\ & V_j & \end{tikzcd}$$

direkte Summe "Koprodukt"

$$\begin{tikzcd} W & & \bigoplus\limits_{i\in I} V_{i\in I} \arrow[ll, dashed] \\ & V_j \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "\iota_j"'] & \end{tikzcd}$$

Quiz / Lineare Abbildungen und Basen

Was hat die universelle Eigenschaft der direkten Summe mit dem folgenden Satz zu tun?

Satz. Seien V, W Vektorräume und $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Dann existiert zu jeder Familie $(w_i)_{i \in I}$ von Elementen aus W genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, so dass $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Quiz / Lineare Abbildungen und Basen

Was hat die universelle Eigenschaft der direkten Summe mit dem folgenden Satz zu tun?

Satz. Seien V, W Vektorräume und $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Dann existiert zu jeder Familie $(w_i)_{i\in I}$ von Elementen aus W genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, so dass $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$ gilt.

- Die Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I}$ induziert Isomorphismus $V \xrightarrow{c_{\mathcal{B}}} K^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} K$

also Homom. $V \to W$ $\leftrightsquigarrow$ Homom $K^{(I)} \to W$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "c_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "f"'] & K^{(I)} \arrow[d] \\ & W \end{tikzcd}$$

Mit der Identifikation $\mathrm{Hom}_K(K, W) = W$ $\quad (g \leftrightarrow g(1))$

erhalten wir

universelle Eig der dir. Summe $K^{(I)}$

$$\mathrm{Hom}(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K^{(I)}, W) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_K(K,W) = W^I$$