

Übersicht

Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

K Kp., V endl. d. d. VR, $f: V \rightarrow V$

$$\text{charpol}_f = \det(X E_n - M_B^B(f)) \in K[X]$$

$$\text{minpol}_f \in K[X]$$

Satz von Cayley-Hamilton: $\text{minpol}_f \mid \text{charpol}_f$

f trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ es en. Basis $\mathcal{B}$ von V
mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ob. Dreiecksm.

$\Leftrightarrow \text{charpol}_f$ (äquiv. minpol_f)
zerfällt vollst. in LF.

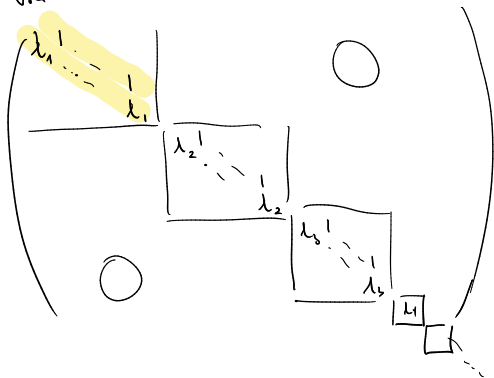
Die Jordansche Normalform

K Kp., V endl.-dim'l K -VR

$f: V \rightarrow V$ trigonalisierbarer Endom.

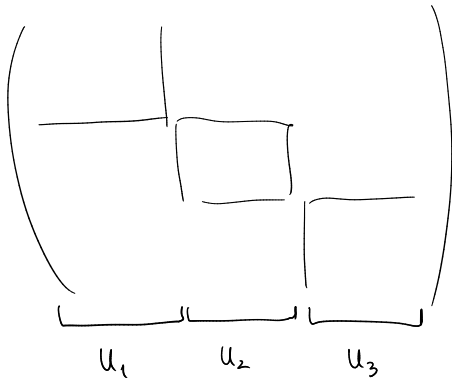
Dann ex. Basis B von V mit

$$M_B^B(f) =$$



Strategie des Beweises (der Existenz der JNF)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) =$$



Block-Diagonalform

$\hat{=}$ Zerlegung von V in
 f -invariant UVR

1. Schritt:

Zerlegung von V als

$$V = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{\lambda_r},$$

wo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarw. versch. EW

$\tilde{V}_{\lambda_i}$ "verallg. ER"

2. Schritt $f|_{\tilde{V}_{\lambda_i}}$ hat λ_i als einzigen EW
 $\leadsto f|_{\tilde{V}_{\lambda_i}} - \lambda_i \cdot \text{id}_{\tilde{V}_{\lambda_i}}$ hat 0 als
einzigen EW

Nilpotente Endomorphismen

f nilpotent $\Leftrightarrow$ es ex. $i \in \mathbb{N}$ mit $f^i = 0$
 $\Leftrightarrow f$ trigonalisierbar mit 0 als einzigen EW.

Die Jordansche Normalform

Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Jordan-Blöcke

Def. Seien K ein Körper, $r \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$.

Dann heißt

$$J_{r,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_r(K)$$

der Jordan-Block der Größe $r \times r$ zum Eigenwert λ .

Quiz

Berechnen Sie $J_{r,0}^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Quiz

Berechnen Sie $J_{r,0}^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

$$J_{r,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_r(K)$$

$$\leadsto e_1 \mapsto 0, \quad e_2 \mapsto e_1, \dots, e_r \mapsto e_{r-1}$$

i -mal anwenden: $e_1 \mapsto 0, \quad e_2 \mapsto 0, \dots, e_i \mapsto 0, \quad e_{i+1} \mapsto e_1, \dots, e_r \mapsto e_{r-i}$

$$\leadsto J_{r,0}^i = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{r-i} & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_i \\ \hline \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{r-i} & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_i \end{array} \right) \quad \text{für } 1 \leq i \leq r-1, \quad J_{r,0}^i = 0 \quad \forall i \geq r.$$

Jordansche Normalform

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

Def. Wir sagen, eine Matrix $A \in M_n(K)$ habe Jordansche Normalform (JNF),
wenn $k \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ ex.,

so dass

$$A = \text{diag} (J_{r_1, \lambda_1}, \dots, J_{r_k, \lambda_k})$$

↑
Blk-Diagonalmatrix

Quiz

Welche der folgenden Matrizen haben Jordansche Normalform?

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Quiz

Welche der folgenden Matrizen haben Jordansche Normalform?

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$



Jde Diagonalmatr.
hat JNF

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$



$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right),$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$



(nicht quadrat!)!

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$



Satz über die Jordansche Normalform für trigonalisierbare Matrizen

Sei K ein Körper, A eine trigonalisierbare Matrix $\in M_n(K)$. ($n \geq 1$)

Dann ist A konjugiert zu einer Matrix in JNF, d.h.

es existieren $S \in GL_n(K)$, $k \geq 1$, $r_1, \dots, r_k \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$

so dass $SAS^{-1} = \text{diag}(J_{r_1, \lambda_1}, \dots, J_{r_k, \lambda_k})$

Die so erhaltene JNF ist eindeutig bestimmt bis auf die Reihenfolge der Blöcke, das heißt,

- k (= Anzahl der Blöcke) ist end. bestimmt.
- die Paare $(r_1, \lambda_1), \dots, (r_k, \lambda_k)$ sind end. bestimmt bis auf die Reihenfolge.

↙
obere Dreiecksmatrix,
daher ist die Voraussetzung
"A trigonalisierbar"
offensichtlich notwendig.

Satz über die Jordansche Normalform für trigonalisierbare Endomorphismen

Theore. Seien K ein Körper, V ein endlichdim. K -VR, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.
Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V , so dass die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ Jordansche Normalform hat.

Die JNF ist – bis auf die Reihenfolge der Blöcke – unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$, d.h.: sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen von V , so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ in JNF sind, dann unterscheiden sich $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ höchstens durch die Reihenfolge der Blöcke.

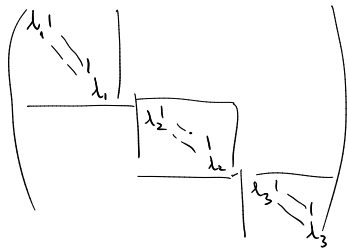
Jordansche Normalform und charakteristisches Polynom, Minimalpolynom

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$ in JNF: $A = \text{diag}(J_{r_1, \lambda_1}, \dots, J_{r_k, \lambda_k})$

(1) Dann ist
$$\text{charpol}_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$$

(2) Seien $\mu_1, \dots, \mu_s$ die paarw. versch. EW von A und sei $m_1, \dots, m_s$ jeweils die Größe des größten Jordan-Blocks zu diesem EW. Dann

$$\text{minpol}_A = \prod_{i=1}^s (X - \mu_i)^{m_i}.$$



$$\begin{aligned} J_{r,0}^r &= 0 \\ J_{r,0}^{r-1} &\neq 0 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform

Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Eindeutigkeit der JNF

K Kp., $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$ trigonalisierbar

Sind B und $B' \in M_n(K)$ Matrizen in JNF, die beide zu A konjugiert sind, dann unterscheiden sich B und B' höchstens in der Reihenfolge der Blöcke.

M.a.W.: Sind B, B' Matrizen in JNF, die miteinander konjugiert sind, dann unterscheiden sich B, B' ---

$$B = SAS^{-1}$$

$$B' = TAT^{-1}$$

$$\leadsto B' = TS^{-1} B \underbrace{ST^{-1}}_{(TS^{-1})^{-1}}$$

Die Diagonaleinträge

Sei $B \in M_n(K)$ in JNF.

Dann sind die Diagonaleinträge
mit ihren Vielfachheiten bestimmt
durch charpol_B , ändern sich also nicht
bei Konj. in einer Matrix in JNF.



Bleibt zu betrachten: "Größe der Blöcke zu den einzelnen EW"

Entscheidender Fall: alle Diagonaleintr. von B sind 0
 $\rightarrow$ dann $\ker B =$ Anzahl der Blöcke, betrachte dann $B^2, B^3, \dots$

Partitionen

Seien $r_1 \geq r_2 \geq \dots$ natürliche Zahlen, nur endl. viele > 0

Dann nennen wir $(r_1, r_2, \dots)$ eine Partition von $n = \sum_{i \geq 1} r_i$

Beispiel $(3, 2, 1, 1, 1, 0, \dots)$ ist eine Partition von 8.

$(8, 0, \dots)$ — " — 8

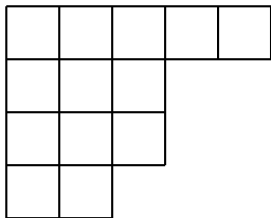
Die duale Partition

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(r_1 \geq r_2 \geq \dots)$ eine Partition von n .

Dann ist auch $s_i := \# \{ j \mid r_j \geq i \}, \quad i \geq 1$

eine Partition von n , die sogenannte duale Partition von $(r_1 \geq r_2 \geq \dots)$.

Lemma In dieser Situation ist die duale Partition von $(s_1 \geq s_2 \geq \dots)$ die Partition $(r_1 \geq r_2 \geq \dots)$.



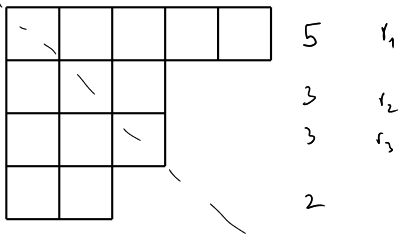
5

3

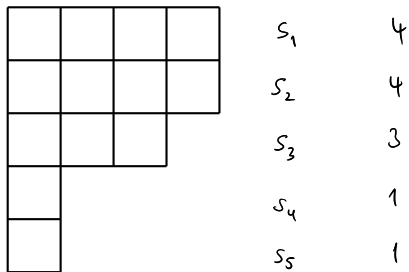
3

2

$$\hat{=} 5 + 3 + 3 + 2 = 13$$



$$\hat{=} 5 + 3 + 3 + 2 = 13$$



$$= 13$$

$$s_i = \# \{ j ; r_j \geq i \}$$

Die Größe der Jordan-Blöcke zu einem Eigenwert

Sei $B \in M_n(K)$ eine Matrix in JNF, $\lambda \in K$ ein EW von B .

Seien $r_1 \geq r_2 \geq \dots$ die Größen der JBlöcke zu B zum EW λ .

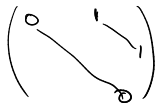
$$\left[\begin{array}{l} \bullet \dim \underbrace{\ker(B - \lambda E_n)}_{\substack{= \text{ER von } B \\ \text{zum EW } \lambda}} = \text{Anzahl der Blöcke zum EW } \lambda \end{array} \right.$$

$$\text{Dann ist} \quad s_i = \dim \ker((B - \lambda E_n)^i) - \dim \ker((B - \lambda E_n)^{i-1})$$

die durch Partition zur Partition $(r_1 \geq r_2 \geq \dots)$

$i \geq 1$

Begr $\dim(\text{Ker}(J_{r,0}^{\bar{i}})) = \begin{cases} \bar{i} & \bar{i} \leq r \\ r & \bar{i} \geq r \end{cases}$



also auch: $\dim \text{Ker}(\underbrace{(J_{r,\lambda} - \lambda E_n)^{\bar{i}}}_{= J_{r,0}}) = \begin{cases} \bar{i} & \bar{i} \leq r \\ r & \bar{i} \geq r \end{cases}$

und $\dim \text{Ker}(J_{r,\lambda'} - \lambda E_n)^{\bar{i}} = 0 \quad \lambda' \neq \lambda$

$\rightarrow S_{\bar{i}} = \dim \text{Ker}((B - \lambda E_n)^{\bar{i}}) - \dim \text{Ker}((B - \lambda E_n)^{\bar{i}-1})$

= Anzahl der JBlöcke zum EW λ der Größe mindestens $\bar{i}$.

$= \# \{ \bar{j} ; r_{\bar{j}} \geq \bar{i} \}$

Berechnung der JNF einer Matrix

- Die Ausdrücke $\dim \ker((B - \lambda E_n)^i)$ sind für B und für alle zu B ähnliche Matrizen gleich (denn $\ker(\underbrace{(SB\tilde{S}^{-1} - \lambda E_n)^i}_{\parallel} S(B - \lambda E_n)^i S^{-1})$)

$\leadsto$ es folgt die
Eindeutigkeitsaussage.

hat dieselbe Dim. wie
 $\ker((B - \lambda E_n)^i)$

Zur Berechnung:

- Berechnen char pol_B
- für alle EW λ , berechnen $\dim \ker((B - \lambda E_n)^i)$

- berechnen die durch Partition zur Partition $\dim \ker((B - \lambda E_n)^i)$
 $- \dim \ker((B - \lambda E_n)^{i-1})$

Diese gibt die Größe der J-Blöcke zum EW λ an.

Quiz

Berechnen Sie die Jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

Quiz

Berechnen Sie die Jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} =: A$$

$$\text{charpol}_A = (X-1)^4$$

alle Diagonaleinträge = 1

$$\text{minpol}_A = (X-1)^3$$

es ex. J-Blöcke der Größe 3 zum EW 1 (und keine größeren Blöcke zu diesem EW)

A ist trigonalisierbar und konjugiert zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{minpol}_A = (X-1)^3$$

$$\hat{=} \dim \text{Ker}((A - E_4)^3) = 4$$

Quiz

Sei $A \in M_7(\mathbb{Q})$ mit

$$\text{charpol}_A = (X - 3)^7, \quad \text{minpol}_A = (X - 3)^3.$$

Welche weiteren Informationen werden benötigt, um die JNF von A eindeutig festzulegen?

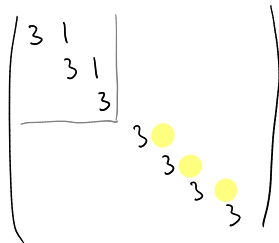
Quiz

Sei $A \in M_7(\mathbb{Q})$ mit

$$\text{charpol}_A = (X - 3)^7, \quad \text{minpol}_A = (X - 3)^3.$$

Welche weiteren Informationen werden benötigt, um die JNF von A eindeutig festzulegen?

Wissen:



mindestens ein J-Block
der Größe 3, keine
größeren Blöcke

Quiz

Sei $A \in M_7(\mathbb{Q})$ mit

$$\text{charpol}_A = (X - 3)^7, \quad \text{minpol}_A = (X - 3)^3.$$

Es sei

$$\dim \text{Ker}(A - 3E_n) = 3, \quad \dim(\text{Ker}((A - 3E_n)^2)) = 5.$$

Geben Sie die JNF von A an.

Quiz

Sei $A \in M_7(\mathbb{Q})$ mit

$$\text{charpol}_A = (X - 3)^7, \quad \text{minpol}_A = (X - 3)^3.$$

Es sei

$$\dim \text{Ker}(A - 3E_n) = 3, \quad \dim(\text{Ker}((A - 3E_n)^2)) = 5.$$

5-3=2 Blöcke der Größe ≥ 2

Geben Sie die JNF von A an.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & \\ & & 3 & & & & \\ \hline & & & 3 & 1 & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{minpol}_A &= (X-3)^3 \\ \Rightarrow (A-3E_n)^3 &= 0 \\ \rightarrow \dim \text{Ker}((A-3E_n)^3) &= 7 \\ \leadsto 7-5 &= 2 \text{ Blöcke der Größe } \geq 3 \end{aligned}$$

Zerlegung in verallgemeinerte Eigenräume

Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

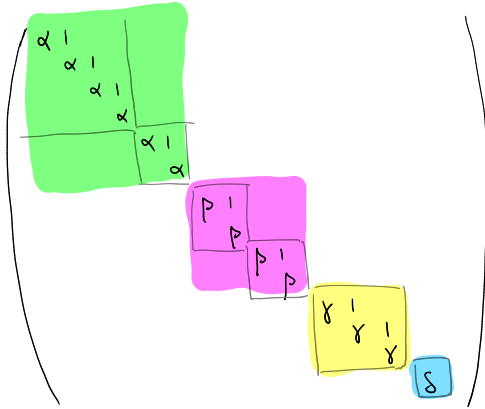
Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Ziel



$\alpha, p, \gamma, \delta$ paarweise verschieden

Wollen die verschiedenen EW voneinander „isolieren“.

$$\mathcal{B} = (\underbrace{b_1, \dots, b_6}_{\alpha}, \underbrace{b_7, \dots, b_{10}}_{p}, \underbrace{b_{11}, \dots, b_{13}}_{\gamma}, \underbrace{b_{14}}_{\delta})$$

$$V = \begin{matrix} \tilde{V}_\alpha & \oplus & \tilde{V}_p & \oplus & \tilde{V}_\gamma & \oplus & \tilde{V}_\delta \\ v_1 & & v & & u & & u \\ V_\alpha & & V_p & & V_\gamma & & V_\delta \end{matrix}$$

Verallgemeinerte Eigenräume

K Körper, V ein endlichdimensional K -VR

Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, und sei $\lambda \in K$ ein EW von f .

Def. Dann heißt
$$\tilde{V}_\lambda = \bigcup_{i \geq 0} \operatorname{Ker}((f - \lambda \cdot \operatorname{id}_V)^i) \subseteq V$$

der verallgemeinerte Eigenraum von f zum EW λ (oder: Hauptraum).

Bem. Wir haben
$$0 = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)^0 \subseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V) \subseteq \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{id}_V)^2) \subseteq \dots$$
$$\subseteq V$$

Quiz

Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenräume des Endomorphismus $\mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$,
 $a \mapsto Ax$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

Quiz

Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenräume des Endomorphismus $\mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$,
 $a \mapsto Ax$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \text{Ker}(A - 2E_4) = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\text{Ker}((A - 2E_4)^2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

$$\stackrel{\parallel}{\sim} V_2 = \text{Ker}((A - 2E_4)^i) \quad \forall i \geq 2$$

$$V_{-2} = \tilde{V}_{-2} = \langle e_4 \rangle$$

Zerlegung in verallgemeinerte Eigenräume

Satz Seien K ein Körper, V ein endlichdim. K -VR, $f \in \text{End}_K(V)$.

Es sei f trigonalisierbar und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarw.

versch. EW von f und sei $m_i = \text{mult}_{\lambda_i}(\text{minpol}_f)$, $i=1, \dots, r$.

Dann

$$(1) \quad \tilde{V}_{\lambda_j} = \bigcup_{i \geq 0} \text{Ker}((f - \lambda_j \text{id}_V)^i) = \text{Ker}((f - \lambda_j \text{id}_V)^{m_j})$$

$$(2) \quad V = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{\lambda_r}.$$

Quiz

Seien K ein Körper und $a, d \in K$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}.$$

Seien V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $f \in \text{End}_K(V)$, $V = U \oplus W$, für f -invariante Unterräume U, W .

Begründen Sie: $\text{minpol}_f \mid \text{minpol}_{f|_U} \cdot \text{minpol}_{f|_W}$.

Wann gilt sogar „=“?

Quiz

Seien K ein Körper und $a, d \in K$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}.$$

1. Fall $a \neq d$. $\text{minpol}_A = (X-a)(X-d)$

2. Fall $a = d$ $\text{minpol}_A = X-a = X-d$

Jedenfalls $\text{minpol}_f(f|_U) = 0$,
also $\text{minpol}_{f|U} \mid \text{minpol}_f$

Seien V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $f \in \text{End}_K(V)$, $V = U \oplus W$, für f -invariante Unterräume U, W .

Begründen Sie: $\text{minpol}_f \mid \text{minpol}_{f|_U} \cdot \text{minpol}_{f|_W}$.

Wann gilt sogar „ $=$ “? $\checkmark$ (genau dann) wenn
 $\text{minpol}_{f|_U}, \text{minpol}_{f|_W}$ teilerfremd

Setze Basis $\mathcal{B}$ von V aus Basen
von U und W zusammen

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\text{minpol}_{f|_U} \cdot \text{minpol}_{f|_W})(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = 0$$

Ein allgemeiner Zerlegungssatz

Satz $K \subseteq K_f$, V endlichdim. K -VR, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus

Es gelte $\text{minpol}_f = \zeta \cdot \xi$ mit $\zeta, \xi \in K[X]$ teilerfremde Pol.

Dann sind $U := \text{Ker}(\zeta(f))$ und $W := \text{Ker}(\xi(f))$ invar. UR von V ,

so dass (1) $U = \text{Im}(\xi(f))$, $W = \text{Im}(\zeta(f))$,

(2) $V = U \oplus W$

(3) $\text{minpol}_{f|_U} = \zeta$, $\text{minpol}_{f|_W} = \xi$.

Beweis. • $f(U) \subseteq U$: Sei $u \in U = \text{Ker}(\zeta(f))$.

$$\begin{aligned} \text{Dann } f(u) \in \text{Ker}(\zeta(f)), \text{ denn } \zeta(f)(f(u)) &= (\zeta(f) \circ f)(u) \\ &= (f \circ \zeta(f))(u) = 0. \end{aligned}$$

zu (1) Beh. $U = \text{Ker}(\zeta(f)) = \text{Im}(\xi(f))$.

Begr. Weil $\zeta, \xi \in K[X]$ teilerfremd, ex. $p, q \in K[X]$ mit $p\zeta + q\xi = 1$.

$$\text{Also } p(f) \circ \zeta(f) + \xi(f) \circ q(f) = \text{id}_V.$$

⊗ • $U \subseteq \text{Im}(\xi(f))$: $u \in U \leadsto u = \underbrace{p(f)(\zeta(f)(u))}_{=0} + \xi(f)(q(f)(u)) \in \text{Im}(\xi(f))$

• $U \supseteq \text{Im}(\xi(f))$: $\zeta(f)(\xi(f)(v)) = (\zeta \cdot \xi)(f)(v) = \underbrace{\text{minpol}_f(f)}_{=0}(v) = 0.$

zu (2) Wenn $U = \text{Ker}(\zeta(f))$, $W = \text{Im}(\zeta(f))$, gilt $\dim U + \dim W = \dim V$.

$\leadsto$ gze: $U \cap W = 0$.

Für $v \in U \cap W = \text{Ker}(\zeta(f)) \cap \text{Im}(\zeta(f))$ gilt

$$v = p(f)(\zeta(f)(v)) + q(f)(\zeta(f)(v)) = 0.$$

zu (3). Jedenfalls gilt $\text{minpol}_{f|U} \mid \text{minpol}_f$ (denn $\text{minpol}_f(f|U)$)
 $\text{minpol}_{f|W} \mid \text{minpol}_f$.

Andererseits gilt $\text{minpol}_f \mid \text{minpol}_{f|U} \cdot \text{minpol}_{f|W}$ (siehe Quiz)

Nun gilt $\zeta(f|_U) = 0$, denn $U = \text{Ker}(\zeta(f))$,

analog $\xi(f|_W) = 0 \rightarrow \text{minpol}_{f|_U} \mid \zeta$
 $\text{minpol}_{f|_W} \mid \xi$

$$\rightarrow \text{minpol}_f \mid \text{minpol}_{f|_U} \cdot \text{minpol}_{f|_W} \mid \zeta \cdot \xi = \text{minpol}_f$$

Es folgt $\text{minpol}_{f|_U} = \zeta$, $\text{minpol}_{f|_W} = \xi$.

Spezialfall $\zeta = \pi^i$, π irreduzibel

Sei in der obigen Situation $(f: V \rightarrow V, \text{minpol}_f = \zeta \cdot \xi, \zeta, \xi \text{ teilerfremd})$

$\zeta = \pi^i$ mit π irreduzibel (d.h. $\pi \nmid \xi$)

Sei wieder $U = \text{Ker}(\zeta(f))$, $W = \text{Ker}(\xi(f))$

Dann

$$(1) \quad \bigcup_{j \geq 0} \text{Ker}(\pi^j(f)) = \text{Ker}(\underbrace{\pi^i(f)}_{= \zeta(f)}) = U$$

(2) Ist $\text{charpol}_f = \pi^{m'} \cdot \eta$ mit $\pi \nmid \eta$, dann gilt

$$\text{charpol}_{f|_U} = \pi^{m'}, \quad \text{charpol}_{f|_W} = \eta.$$

Beweis zu (1) " $\supseteq$ " ist klar. '⊆' Weil $\pi^{\sharp}$ und ξ teilspernd
sind, folgt mit $\textcircled{*}$, dass $\text{Ker}(\pi^{\sharp}(f)) \subseteq \text{Im}(\xi(f)) = U$.

zu (2). Jedenfalls gilt $\text{charpol}_f = \text{charpol}_{f|U} \cdot \text{charpol}_{f|W}$

Weil charpol und minpol dieselben inh. Faktoren haben,

gilt: $\text{charpol}_{f|U}$ ist Potenz von π

$\text{charpol}_{f|W}$ wird nicht von π geteilt

Zusammenfassung

K Körper, V endlichdim. K -VR,

Sei $f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarw. versch. EW von f ,

$$\text{minpol}_f = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{charpol}_f = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$$

(1) Es gilt $\tilde{V}_{\lambda_i} = \bigcup_{j \geq 0} \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V)^j = \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id}_V)^{m_i}$

(2) Es gilt $V = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{\lambda_r}$.

(3) Für alle i ist $\tilde{V}_{\lambda_i}$ ein f -invarianter Unterraum und

$$\text{minpol}_{f|_{\tilde{V}_{\lambda_i}}} = (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{charpol}_{f|_{\tilde{V}_{\lambda_i}}} = (X - \lambda_i)^{n_i},$$

insbesondere

- $\dim \tilde{V}_{\lambda_i} = n_i$

- λ_i einziger EW von $f|_{\tilde{V}_{\lambda_i}}$.

Nilpotente Endomorphismen

Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Nilpotente Endomorphismen

Def. Seien K ein Körper, V ein VR über K .

Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt nilpotent,
wenn $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^i = 0$.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so heißt $A \in M_n(K)$ nilpotent, wenn $i \in \mathbb{N}$ ex.,
s.d. $A^i = 0$.

- Bsp.
- $J_{r,0}$ ist nilpotent: $J_{r,0}^r = 0$
 - Allg.: jede Matrix in JNF mit 0 als einzigem EW ist nilpotent

Äquivalente Charakterisierungen

K K_p , V endlichdim'l K -VR,
 $n = \dim V$

Lemma Sei $f \in \text{End}_K(V)$.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist nilpotent (d.h. es ex. $i \in \mathbb{N}$: $f^i = 0$)

(ii) $f^n = 0$

(iii) $\text{minpol}_f \mid X^n$

(iv) $\text{charpol}_f = X^n$

(v) es ex. Basis B von V , s.d. $M_B^B(f)$ str. Dreiecksmat.
ist, auf deren Diagonale nur Nullen stehen.

Beweis

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) klar.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Cayley-Hamilton

(iv) $\Rightarrow f$ trigonalisierbar
mit 0 als einzigen
EW $\Rightarrow$ (v)

(v) $\Rightarrow$ (iv):

$\text{charpol}_f = \text{charpol}_{M_B^B(f)}$

bzw. (i) $\Rightarrow$ (iv)

(i) $\Rightarrow$ (iv) Wenn $f^i = 0$ gilt, dann folgt $\text{minpol}_f \mid X^i$.

Weil charpol_f und minpol_f dieselben nach Faktoren haben, hat dann auch charpol_f die Form X^i . Weil $\deg \text{charpol}_f = n$ ist, folgt $\text{charpol}_f = X^n$.

Quiz

Sei K ein Körper. Geben Sie nilpotente Matrizen $A, B \in M_2(K)$ an, so dass $A + B$ nicht nilpotent ist.

Richtig oder falsch? Sind K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_n(K)$, so dass AB nilpotent ist, dann folgt

(1) A nilpotent (2) BA nilpotent.

Quiz

Sei K ein Körper. Geben Sie nilpotente Matrizen $A, B \in M_2(K)$ an, so dass $A + B$ nicht nilpotent ist.

zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, denn ist $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar.

Richtig oder falsch? Sind K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_n(K)$, so dass AB nilpotent ist, dann folgt

(1) A nilpotent  (2) BA nilpotent.  Ist $(AB)^m = 0$, so ist jedenfalls

zum Beispiel
 $A = E_n$,
 B irgendeine
nilpotente Matrix

$$(BA)^{m+1} = B \underbrace{A B A \cdots B A}_{= (AB)^m} = 0.$$

Kommutierende Endomorphismen

Satz Seien K ein Körper, V ein endl.-dim. K -VR, $f, g \in \text{End}_K(V)$
mit $f \circ g = g \circ f$.

- (1) Sind f, g diagonalisierbar, dann sind f und g simultan diagonalisierbar, d.h. es ex. eine Basis $\mathcal{B}$ von V , s.d. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ Diagonalmatr. sind.
- (2) Sind f, g trigonalisierbar, dann sind f und g simultan trigonalisierbar, d.h. es ex. eine Basis $\mathcal{B}$ von V , s.d. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ ob. Dreiecksmatr. sind.
- (3) Sind f, g diagonalisierbar, dann ist auch $f + g$ diagonalisierbar.
- (4) Sind f, g nilpotent, dann ist auch $f + g$ nilpotent.

Beweis (1), (2) siehe Übungsblätter.

(3) f, g sind simultan diag'bar nach (1), und die Summe von Diagonalmatr. ist eine Diagonalmatrix.

(4) f, g sind nach (2) simultan trigonalisierbar, und Summe der entsprechenden darstellenden Matrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatr. mit nur Nullen auf der Diagonale.