

Übersicht

Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

$$K \text{ Körper, } n \in \mathbb{N}, \quad A \in M_n(K)$$

Charakteristisches Polynom

$$\text{charpol}_A = \det(X E_n - A) \in K[X]$$

Trigonalisierbarkeit

A trigonalisierbar $\Leftrightarrow A$ konjugiert zu einer
oberen Dreiecksmatrix

$\Leftrightarrow \text{charpol}_A$ zerfällt vollst. in
Linear faktoren

Minimalpolynom

$$(\text{minpol}_A) = \text{Ker}(\phi_A)$$

$$\begin{aligned} \phi_A: K[X] &\rightarrow M_n(K) \\ X &\mapsto A \end{aligned}$$

d.h. minpol_A ist das (eind. best.)
normierte Polynom kleinsten Grades
mit $\text{minpol}_A(A) = 0$.

Der Satz von Cayley-Hamilton

$$K \text{ } K_p, \quad n \in \mathbb{N}$$

Für jede Matrix $A \in M_n(K)$ gilt $\text{charpol}_A(A) = 0$ ($\in M_n(K)$)

Mit anderen Worten $\text{minpol}_A \mid \text{charpol}_A$.

Folgerungen aus dem Satz von Cayley-Hamilton

$$K \text{ } K_r, \\ n \in \mathbb{N} \\ A \in M_n(K)$$

- minpol_A und charpol_A haben dieselben Nullstellen in K
- minpol_A und charpol_A haben dieselben irreduziblen Teiler (in $K[X]$).
- A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ minpol_A zerfällt vollst. in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen.

Invariante Unterräume

$U \subseteq V$ heißt f -invariant, wenn
UVR

(f -invariant)

K Körper

V endlich dim K -VR

f Endomorphismus $V \rightarrow V$

$f(U) \subseteq U$ $\left(\rightsquigarrow f|_U : U \rightarrow U \right)$
 $u \mapsto f(u)$

$\in \text{End}_K(U)$

Zyklische Unterräume und die Begleitmatrix eines Polynoms

$$K, \quad V, \quad f: V \rightarrow V$$

$U \subseteq V$ UVR heißt f -zyklisch, wenn $u \in U$ es

$$\text{gibt mit } U = \langle u, f(u), f^2(u), \dots \rangle$$

Dann heißt U Basis $B = (u, f(u), \dots, f^{d-1}(u))$ $d = \dim U$

$$\leadsto M_{B,B}^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und dann}$$

$$\text{Charpol}_f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

Invariante und zyklische Unterräume

Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Invariante Unterräume

K Kp. V (endlichdim.) K -VR

Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Def. Ein UVR $U \subseteq V$ heißt f -invariant, wenn $f(U) \subseteq U$ ist.

(in diesem Fall ist $f|_U: U \rightarrow U$ ein Endomorphismus
 $u \mapsto f(u)$ von U)

Triviale Beispiele: Für jedes f sind 0 und V invariant.

Zyklische Unterräume

K K_p , V ein K -VR

Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Def. Ein UVR $U \subseteq V$ heißt f -zyklisch, wenn
ein Vektor $u \in U$ existiert, so dass

$$U = \langle u, f(u), f^2(u), \dots \rangle.$$

Beh. Jeder f -zyklische UVR ist f -invariant.

(Um $f(U) \subseteq U$ gezeigt es zu zeigen, dass $f(v) \in U$ für alle
 v aus irgendeinem Erzeugendensystem von U .)

Quiz

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ und f der durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Endomorphismus.

Welche der folgenden Untervektorräume sind f -invariant? Welche sind f -zyklisch?

$$U_1 = \langle b_1 \rangle, \quad U_2 = \langle b_1 + b_2 \rangle, \quad U_3 = \langle b_1, b_2 \rangle, \quad U_4 = \langle b_1 + b_2, b_3 \rangle, \quad U_5 = V.$$

Quiz

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ und f der durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} f(b_1) &= b_2 \\ f(b_2) &= b_1 \\ f(b_3) &= b_3 \end{aligned}$$

gegebene Endomorphismus.

Welche der folgenden Untervektorräume sind f -invariant? Welche sind f -zyklisch?

$U_1 = \langle b_1 \rangle, \quad U_2 = \langle b_1 + b_2 \rangle, \quad U_3 = \langle b_1, b_2 \rangle, \quad U_4 = \langle b_1 + b_2, b_3 \rangle, \quad U_5 = V.$

f -zyklisch ($f(b_1+b_2) = b_1+b_2$)
invariant, nicht zyklisch ($f|_{U_4} = \text{id}$)

nicht f -inv. ($f(b_1) = b_2 \notin U_1$)
 f -zyklisch ($f(b_1) = b_2, f^2(b_1) = b_1$)
invariant, nicht zyklisch ($f^2(v) = v \quad \forall v \in V$)

Die Dimension eines zyklischen Vektorraums

Lemma Seien K ein Körper, V ein endlichdim'l K -VR, $f: V \rightarrow V$ ein Endom.

Es sei V ein f -zyklischer VR. Es sei $n = \dim V$.

Wir schreiben $V = \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle$ für ein geeignetes Element $v \in V$.

Dann gilt $V = \langle v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v) \rangle$

(also ist $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ eine Basis von V).

Beweis Sei $\bar{j}$ maximal gewählt, so dass $v, f(v), \dots, f^{\bar{j}}(v)$ linear unabh. ist.

Dann existieren $a_i \in K$ mit $f^{\bar{j}+1}(v) = a_0 v + a_1 f(v) + \dots + a_{\bar{j}} f^{\bar{j}}(v)$

(so ein $\bar{j}$ existiert, weil V endlichdimensional ist.)

Dann ist $\langle v, f(v), \dots, f^j(v) \rangle$ ein f -invarianter UVR von V ,
enthält also alle Vektoren der Form $f^i(v)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Es folgt also} & \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle & = \langle \underbrace{v, f(v), \dots, f^j(v)}_{\substack{\text{l.u.} \\ \leadsto \text{Dimension } j+1}} \rangle \\ & \swarrow & \\ & V & \end{array}$$

Aus $\dim V = n$ folgt $j = n-1$.

Die darstellende Matrix im zyklischen Fall

K Kp., V K -VR, $f: V \rightarrow V$ Endom., $n = \dim V$,

V sei f -zyklisch, etwa $V = \langle v, f(v), \dots, f^{n-1}(v) \rangle$

Dann ist also $B = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ eine Basis von V .

Es gilt

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & & & & a_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$f^n(v) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v)$$

$$(f^0 = \text{id}_V)$$

Die Begleitmatrix eines Polynoms

Sei K ein Körper

Def Sei $\chi \in K[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad n ,

$$\text{d.h. } \chi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

Dann heißt

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

die Begleitmatrix
des Polynoms χ .

Quiz: Das charakteristische Polynom einer Begleitmatrix

Sei K ein Körper, $\chi \in K[X]$ normiert vom Grad n und
sei $A \in M_n(K)$ die Begleitmatrix von χ . Dann gilt

$$\text{charpol}_A = \chi.$$

Quiz: Das charakteristische Polynom einer Begleitmatrix

Sei K ein Körper, $\chi \in K[X]$ normiert vom Grad n und
sei $A \in M_n(K)$ die Begleitmatrix von χ . Dann gilt

$$\text{charpol}_A = \chi.$$

Beweis Sei $\chi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Wir berechnen $\det(X E_n - A)$ durch Entwicklung
nach der ersten Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & X & a_{n-2} \\ & & -1 & X+a_{n-1} \end{pmatrix} = X \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} X & & a_1 \\ -1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & a_{n-2} \\ & & -1 & X+a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_2X + a_1 \\ \text{per Induktion}}} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & & & \vdots \\ & \ddots & & a_{n-2} \\ & & -1 & X+a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\parallel \\ a_0}$$

$$= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0 = \chi.$$

Der Satz von Cayley-Hamilton

Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Der Satz von Cayley-Hamilton

Sei K ein Körper

Satz (1) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$.

Dann gilt $\text{charpol}_A(A) = 0 \quad (\in M_n(K))$.

(2) Seien V ein endlichdim. K -VR und $f: V \rightarrow V$ ein Endom.

Dann gilt $\text{charpol}_f(f) = 0 \quad (\in \text{End}_K(V))$.

Wie kommt man darauf?

- Für $A \in M_2(K)$ ist das eine leichte Rechnung (siehe Übungsaufgaben)
- Für eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in M_n(K)$
ist die Aussage leicht einzusehen, denn $p(D) = \text{diag}(p(d_1), \dots, p(d_n))$.

Ist das nicht klar?

QUIZ

$$\text{charpol}_A(A) = (\det(XE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(0) = 0.$$

Ist das nicht klar?

$$\text{charpol}_A(A) = (\det(XE_n - A))(A) = \det(\overbrace{AE_n - A}^{= 0}) = \det(0) = 0.$$

$\cap$
 $M_n(K)$

$\cap$
 K

Das passt nicht zusammen!

Beweis - Reduktion auf den zyklischen Fall

Wir beweisen Version (2) (für Endomorphismen): K, V endlichdiml K -VR
 $f: V \rightarrow V$ Endomorphism.

Sei $\chi := \text{charpol}_f \in K[X]$

z.z.: $\chi(f)$ ist die Nullabb., d.h. $\chi(f)(v) = 0$ für alle $v \in V$

Sei $v \in V$ und sei $U := \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle \subseteq V$

Dann ist U invariant unter f und wir setzen $g := f|_U \in \text{End}_K(U)$

Es gilt $\text{charpol}_g \mid \chi$, etwa $\chi = \zeta \cdot \text{charpol}_g$.

Also gilt: $\underbrace{\text{charpol}_g(f)(v)}_{(=\text{charpol}_g(g)(v))} = 0$ (dann $\chi(f)(v) = \zeta(f) \left(\underbrace{\text{charpol}_g(f)(v)}_{=0} \right) = 0$)

Wir sehen: Es genügt, den Satz unter der zusätzlichen Annahme zu zeigen,
dass V ein f -zyklischer VR ist, $V = \langle v, f(v), \dots \rangle$

Dann ist (mit $n = \dim V$) $\mathcal{B} = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ eine Basis von V .

$$\text{Es ist } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$c_{\mathcal{B}}(f^n(v))$

Begleitmatrix von

$$\chi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

$$\text{Dann gilt } \chi(f)(v) = \underbrace{f^n(v)} + \underbrace{a_{n-1}f^{n-1}(v) + \dots + a_1f(v) + v} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} -a_i f^i(v)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v)} = 0$$

Direkte Folgerungen

$$\left| \begin{array}{l} p \in K[X] \\ p(A) = 0 \Leftrightarrow \text{minpol}_A \mid p \end{array} \right|$$

Umformulierung:

Satz Sei K ein Körper.

(1) Für $A \in M_n(K)$ gilt $\text{minpol}_A \mid \text{charpol}_A$

(2) Für $f \in \text{End}_K(V)$ gilt $\text{minpol}_f \mid \text{charpol}_f$.
Vendlidinil VR

Satz Seien K ein Körper, f ein Endom. eines endlichdim. K -VR V .

Es sei V ein f -zyklischer VR. Dann gilt $\text{minpol}_f = \text{charpol}_f$.

Beweis Wir wissen bereits, dass $\text{minpol}_f \mid \text{charpol}_f$.

Also genügt es zu zeigen, dass $\deg(\text{minpol}_f) \geq \deg(\text{charpol}_f) = \dim V$

Sei etwa $V = \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle$, also in

$$B = \left(\underset{\substack{\parallel \\ b_1}}{v}, \underset{\substack{\parallel \\ b_2}}{f(v)}, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ b_n}}{f^{n-1}(v)} \right) \text{ eine Basis von } V.$$

Sei $p \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $\deg(p) =: m < n$. Dann gilt

$$p(f)(b_1) = \underbrace{\quad}_{\text{nicht triv. Linearcomb von } b_1, \dots, b_{m+1}} \neq 0, \quad \text{insbes. gilt } p(f) \neq 0$$

Noch einmal der „falsche Beweis“

$$\text{charpol}_A(A) = (\det(XE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(0) = 0.$$

Möchten das folgende Lemma anwenden:

Lemma Sei $\varphi: R \rightarrow S$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen R, S und sei $\Phi: M_n(R) \rightarrow M_n(S)$ der induzierte Ringhomomorphismus ("wende φ auf jeden Matrixeintrag an").

Dann gilt $\varphi(\det_R(M)) = \det_S(\Phi(M)) \quad (\in S).$

Unsur Situation:

$$\psi: K[X] \rightarrow K[A], \quad \Phi: M_n(K[X]) \rightarrow M_n(K[A]).$$

$$X \mapsto A$$

$$\underbrace{\psi \left(\underbrace{\det_{K[X]} (X E_n - A)}_{= \text{charpol}_A} \right)}_{\text{charpol}_A(A)} = \det_{K[A]} \left(\Phi(X E_n - A) \right) = \det_{K[A]} \left(\Phi(X E_n) - \Phi(A) \right)$$

$$= \det_{K[A]} \left(\overbrace{\psi(X)}^A \cdot \overbrace{\Phi(E_n)}^{= E_n \in M_n(K[A])} - \Phi(A) \right)$$

multiplizieren
"Skalar" $\in K[A]$
mit Matrix
 $\in M_n(K[A])$

$$= \det_{K[A]} \begin{pmatrix} A - a_{11} E_n & \dots & -a_{1n} E_n \\ -a_{21} E_n & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} E_n & \dots & A - a_{nn} E_n \end{pmatrix}$$

Folgerungen aus dem Satz von Cayley-Hamilton

Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Nullstellen des Minimalpolynoms

K Körper

V endlichdim. K -VR

Sei $f: V \rightarrow V$.

Satz Für $\lambda \in K$ ist äquivalent

(i) λ ist ein Eigenwert von f

(ii) λ ist eine Nullstelle von charpol_f

(iii) λ ist eine Nullstelle von minpol_f .

 haben wir schon
gesehen

Beweis (iii) $\Rightarrow$ (ii) folgt direkt aus Satz von Cayley-Hamilton: $\text{minpol}_f \mid \text{charpol}_f$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sei $\lambda \in K$ ein EW von f , $v \in V$ ein EV zum EW λ .

Dann gilt für alle $p \in K[X]$: $p(f)(v) = p(\lambda) \cdot v$.

Insbesondere $0 = \text{minpol}_f(f)(v) = \text{minpol}_f(\lambda) \cdot v \xRightarrow{v \neq 0} \text{minpol}_f(\lambda) = 0$.

Irreduzible Teiler des Minimalpolynoms

$K, V, f: V \rightarrow V$
wie oben

Satz. Sei $p \in K[X]$ irreduzibel. Dann gilt:

$$p \mid \text{minpol}_f \iff p \mid \text{charpol}_f.$$

Beweis ' $\Rightarrow$ ' folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton.

' $\Leftarrow$ ': Sei p irred. mit $p \mid \text{charpol}_f$. z.z.: $p \mid \text{minpol}_f$.

Induktion nach $\dim V$.

IA $\dim V \leq 1$. Klar, weil dann
 $\text{minpol}_f = \text{charpol}_f$.

IS. $\dim V > 1$

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ und $U = \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle \subseteq V$, ein f -invariantes UVR.

Sei $g := f|_U : U \rightarrow U$.

Sei $W \subseteq V$ ein Komplement von U : $V = U \oplus W$,
 und sei $h: W \hookrightarrow V \xrightarrow{f} V = U \oplus W \rightarrow W$ der induzierte Endom.
 $u+w \mapsto w$ von W .

Haben gesehen: $\text{chwpol}_f = \text{chwpol}_g \cdot \text{chwpol}_h$.

Nach Vor. gilt $p \mid \text{chwpol}_f$, also - weil $K[X]$ faktoriell und p irred., also prim -

folgt $p \mid \text{chwpol}_g$ oder $p \mid \text{chwpol}_h$.

1. Fall $p \mid \text{chwpol}_g$. Weil U ein f -zyklisches UVR ist, gilt $\text{chwpol}_g = \text{minpol}_g$.

Andererseits gilt $\text{minpol}_f(g) = 0$, also $\text{minpol}_g \mid \text{minpol}_f$.

Es folgt $p \mid \text{minpol}_f$.

2. Fall $p \mid \text{charpol}_h$.

Nach IV gilt $p \mid \text{minpol}_h$.

Es gilt $\text{minpol}_f(h) = 0$, d.h. $\text{minpol}_h \mid \text{minpol}_f$.

Insgesamt folgt $p \mid \text{minpol}_f$.

$$V = U \oplus W$$

$$h: W \rightarrow W$$

$$\dim W < \dim V$$



Quiz

Welche Polynome kommen als Minimalpolynom für eine Matrix $A \in M_5(\mathbb{Q})$ mit charakteristischem Polynom $\chi = X^5 - 2X^2$ in Frage?

Begründen Sie, dass alle diese Möglichkeiten tatsächlich auftreten.

Quiz

Welche Polynome kommen als Minimalpolynom für eine Matrix $A \in M_5(\mathbb{Q})$ mit charakteristischem Polynom $\chi = X^5 - 2X^2$ in Frage?

$$\chi = X^2 \underbrace{(X^3 - 2)}_{\text{irred.} \in \mathbb{Q}[X]} \quad \leadsto \text{nach dem Satz gilt } X \mid \text{minpol}_A, (X^3 - 2) \mid \text{minpol}_A$$
$$\leadsto \text{die einzigen Möglichkeiten sind } X(X^3 - 2), X^2(X^3 - 2)$$

Begründen Sie, dass alle diese Möglichkeiten tatsächlich auftreten.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & 2 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ hat Minimalpol} \\ X(X^3 - 2),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & 2 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ hat Minimal-} \\ \text{polynom} \\ X^2(X^3 - 2).$$

Minimalpolynom und Trigonalisierbarkeit

$K, V,$

$f: V \rightarrow V$ Endom. wie oben

Satz Es sind äquivalent:

(i) f trigonalisierbar

(ii) char pol_f zerfällt vollst. in Linearfaktoren

(iii) min pol_f zerfällt vollst. in Linearfaktoren

Beweis (i) $\Leftrightarrow$ (iii) haben wir schon gezeigt,

(iii) $\Rightarrow$ es gibt kein irred Polynom $p \in K[X]$ mit $\deg(p) > 1$, $p \mid \text{char pol}_f$.

(iii) $\Rightarrow$

— — —

min pol_f

Also folgt (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) aus dem vorherigen Satz.

Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit

$K \quad K_p,$

V endlichdim K -VR

Satz Sei $f: V \rightarrow V$ ein Endom. Dann sind äquivalent:

(i) f diagonalisierbar

(ii) minpol_f zerfällt vollst. in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) einfach.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Induktion nach $\dim V$.

IA. $\dim V \leq 1$ bzw., weil dann alle Endom. diag'bar sind.

Sei nun $\dim V > 1$ und $\lambda \in K$ ein EW von f .

(Eindeut., weil f trigonalisierbar nach dem vorherigen Satz.)

Wir schreiben $\text{minpol}_f = (X - \lambda) \cdot p$ mit $p(\lambda) \neq 0$.

Es sei $U := \text{Ker}(p(f)) \quad (\subseteq V)$

(Dann ist U invariant unter f : Sei $u \in U$. Dann

$$p(f)(f(u)) = f(\underbrace{p(f)(u)}_{=0}) = 0.)$$

Behauptung. $V = V_\lambda \oplus U$

Begründung. • $V_\lambda \cap U = 0$. Sei $v \in V_\lambda \cap U$

Dann gilt

$$0 = \underset{v \in U}{\uparrow} p(f)(v) = \underset{v \in V_\lambda}{\uparrow} p(\lambda) \cdot v \Rightarrow v = 0. \quad p(\lambda) \neq 0$$

• $V_\lambda + U = V$. Die Elemente $X - \lambda$ und p in $K[X]$ sind teilerfremd.

Also existieren $g, h \in K[X]$ mit $\underbrace{(X-\lambda)g + ph = 1}_{\in K[X]}$.

Ist nun $v \in V$, dann gilt $v = \underbrace{\text{id}_V}_{\substack{\parallel \\ \underbrace{1}_{\in K[X]}(f)}}(v) = (f - \lambda \cdot \text{id}_V)(g(f)(v)) + p(f)(h(f)(v))$

Es gilt $(f - \lambda \text{id}_V)(g(f)(v)) \in U$ (denn $\underbrace{p(f)(f - \lambda \text{id}_V)}_{=0}(g(f)(v)) = \underbrace{\text{minpol}_f(f)}_{=0}(g(f)(v)) = 0$)

und $p(f)(h(f)(v)) \in V_\lambda$ (denn $\underbrace{(f - \lambda \text{id}_V)(p(f))}_{=0}(h(f)(v)) = \underbrace{\text{minpol}_f(f)}_{=0}(h(f)(v)) = 0$)

Haben jetzt $V = V_\lambda \oplus U$ Zerlegung in f -invariante UVR.

Es gilt $f|_{V_\lambda} : V_\lambda \rightarrow V_\lambda$ diagonalisierbar $(= \lambda \cdot \text{id}_{V_\lambda})$,

$f|_U : U \rightarrow U$ diagonalisierbar nach IV,

denn $\dim U < \dim V$

und $\text{minpol}_{f|_U} = p$ jedenfalls gilt
 $p(f|_U) = 0$, denn $U = \text{Ker}(p(f))$

$\leadsto$ $\text{minpol}_{f|_U}$ zerfällt
in LF und hat
nur einfache Nullstellen.

also $\text{minpol}_{f|_U} \mid p$

$\leadsto f$ diagonalisierbar.