Übersicht
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

Sei K ein Körper.

$K[X]$ ist ein Hauptidealring, $(a) = \{ x\,a \,;\ x \in K[X] \}$

insbesondere ein faktorieller Ring

Für $f \in K[X]$, $\alpha \in K$ gilt

$$f(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow (X - \alpha) \mid f.$$

Der Ring $K[X]$ ist ein Unterring des Körpers Quot$(K[X])$.

Determinanten über Ringen

R Ring, $M_n(R)$ $\left[M_{m \times n}(R) \right]$

$\cup$

A

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \qquad \left| (a_{ij})_{ij} = A \right.$$

- Produktsatz $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ✓
- Invertierbarkeit: $A \in M_n(R) \iff \det(A) \in R^{\times}$

Das charakteristische Polynom

K Kp., $n \in \mathbb{N}$

$$A \in M_n(K) \rightsquigarrow X \cdot E_n - A \in M_n(K[X])$$

$$\rightsquigarrow \det\left(X \cdot E_n - A\right) \in K[X] \qquad \text{char. Pol.}$$

Trigonalisierbare Endomorphismen

K Kp., V endl.dim K-VR

$f : V \to V$ trigonalisierbar $\iff$ $\exists$ $\mathcal{B}$ Basis von V :

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ obere Dreiecksmatrix

Die Spur einer Matrix

$A \in M_n(K)$

$$\operatorname{charpol}_A = X^n + \underbrace{a_{n-1}}_{\| \; -\operatorname{Spur}(A)} X^{n-1} + \dots + a_1 X + \underbrace{a_0}_{\| \; (-1)^n \det(A)}$$

Das Minimalpolynom

K, $n \in \mathbb{N}$

$A \in M_n(K)$ (es gibt $p \in K[X] \setminus \{0\}$ so dass $p(A) = 0$)

minpol_A := das eindeutig bestimmte normierte Polynom p von kleinstem Grad mit $p(A) = 0$.

Determinanten über Ringen
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Matrizen über Ringen

Sei R ein kommutativer Ring.

Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei

$$M_{m\times n}(R) = \left\{ (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} ;\ a_{ij} \in R \right\}$$

Wie über Körpern: Addition, Multiplikation, Assoziativität, Distributivgesetze

Insbes.: $M_n(R) = M_{n\times n}(R)$ Ring

Quiz

Überlegen Sie:

- Was sind die Ziele bei der Entwicklung einer Theorie von Matrizen über kommutativen Ringen,
- ...speziell in Hinsicht auf den Begriff der Determinante.
- Wo liegen die Probleme?
- Haben Sie eine Idee, wie man die Theorie, die wir über Körpern schon haben, ausnutzen kann? Wenigstens für manche Ringe?

Quiz

Achtung: über Ringen gilt nicht
A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Überlegen Sie:

- Was sind die Ziele bei der Entwicklung einer Theorie von Matrizen über kommutativen Ringen,
- ...speziell in Hinsicht auf den Begriff der Determinante.
- Wo liegen die Probleme?
- Haben Sie eine Idee, wie man die Theorie, die wir über Körpern schon haben, ausnutzen kann? Wenigstens für manche Ringe?

- Definition der Determinante
- Produktsatz
- Charakterisierung invertierbarer Matrizen

- können nicht durch bel. Elemente $\neq 0$ teilen

$\rightsquigarrow$ Gauß-Algorithmus nicht in derselben Form verfügbar

Für Integritätsringe R:
$R \subseteq K := \mathrm{Quot}(R)$, $M_n(R) \subseteq M_n(K)$.

Die Determinante

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$

Für $A \in M_n(R)$ definieren wir

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Determinante von A

Erhalte $\det : M_n(R) \longrightarrow R$.

Determinante und Ringhomomorphismen

$R \hookrightarrow \mathrm{Quot}(R)$
$a \mapsto \frac{a}{1}$

Sei $f : R \to S$ ein Ringhomom.

Für $A \in M_n(R)$ sei $f(A) \in M_n(S)$ die Matrix, die aus A entsteht, indem in jedem Eintrag die Abb. f angewandt wird.

Dann gilt $\det\big(f(A)\big) = f\big(\det(A)\big)$.

Der Produktsatz

Satz Sei R ein kommut. Ring, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_n(R)$.

Dann gilt $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$.

Beweis im Fall R Integritätsring.

Dann genügt es, die Gleichheit dieser Elemente von R im Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ zu überprüfen.

Dort haben wir den Produktsatz in der LA I bewiesen.

Invertierbare Matrizen

R Integritätsring

$A \in M_n(R)$ heißt invertierbar, falls $B \in M_n(R)$ ex. mit

$$AB = E_n = BA.$$

$(\Leftrightarrow A \in M_n(R)^\times)$

- A invertierbar $\rightsquigarrow$ B wie oben eindeutig bestimmt, schreibe A^{-1}
- A invertierbar $\Rightarrow$ $\det(A) \in R^\times$ (denn $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ $\Rightarrow \det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$)

Satz $A \in M_n(R)$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \in R^\times$.

Beweis '$\Leftarrow$': Cramersche Regel über $\mathrm{Quot}(R)$: $A \underbrace{A^{ad}}_{\in M_n(R)} = A^{ad} A = \det(A) \cdot E_n$

Invertierbare Matrizen

$\rightsquigarrow \quad B := \det(A)^{-1} \cdot A^{ad} \in M_n(R)$

$\det(A) \in R^\times$

Dann gilt $AB = BA = E_n$

in $M_n(\mathrm{Quot}(R))$, also auch in $M_n(R)$,

denn $A, B \in M_n(R)$.

Das charakteristische Polynom
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Das charakteristische Polynom einer Matrix

$$XE_n = \begin{pmatrix} X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X \end{pmatrix}$$

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$.

Dann heißt $\det\big(\underbrace{X \cdot E_n - A}_{\in M_n(K[X])}\big) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\delta_{i,\sigma(i)} X - a_{i,\sigma(i)}\right) \in K[X]$

(Bezeichnung: $\operatorname{charpol}_A$) das charakteristische Polynom der Matrix A.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Bem. Ein Element $\lambda \in K$ heißt genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ eine Nullstelle von $\operatorname{charpol}_A$ ist.

Zueinander konjugierte Matrizen

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

Lemma Seien $A \in M_n(K)$ und $S \in GL_n(K)$

Dann gilt $\operatorname{charpol}_A = \operatorname{charpol}_{SAS^{-1}}$

"zueinander konjugierte Matrizen haben dasselbe char. Pol."

Beweis

$$\operatorname{charpol}_{SAS^{-1}} = \det\left(X \cdot E_n - SAS^{-1}\right)$$

$$= \det\left(S \cdot \left(XE_n - A\right) \cdot S^{-1}\right)$$

$$= \det(S) \cdot \det\left(XE_n - A\right) \cdot \det(S)^{-1}$$

$$= \det\left(XE_n - A\right) = \operatorname{charpol}_A$$

$S \cdot XE_n \cdot S^{-1} = XE_n$

$M_n(K[X]) \subseteq M_n(K(X))$

$K(X) := \operatorname{Quot}(K[X])$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

K Körper, V endlich dim.'l K-VR, $f: V \to V$

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

Dann ist $\operatorname{charpol} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$

und dieses Polynom heißt das charakteristische Polynom des Endom. f,

und wird mit $\operatorname{charpol}_f$.

Quiz

Sei K ein Körper. Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}),$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K).$$

$a, b, c, d \in K$

Quiz

Sei K ein Körper. Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}),$$

$$\mathrm{charpol}_A = \det \begin{pmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} = (X-1)^3 - (X-1)$$

$$= (X-1)(X^2-2X)$$

Entwicklung nach 1. Spalte

$$= X(X-1)(X-2)$$

$$= X^3 - X^2 - \cdots$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K).$$

$$\mathrm{charpol}_B = \det \begin{pmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{pmatrix} = X^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Spur}(B)} X + \underbrace{ad-bc}_{=\det(B)}$$

Quiz

Sei K ein Körper. Berechnen Sie das charakteristische Polynom einer oberen Dreiecksmatrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & * & \cdots & * \\ & c_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & c_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Quiz

Sei K ein Körper. Berechnen Sie das charakteristische Polynom einer oberen Dreiecksmatrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & * & \cdots & * \\ & c_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

$X E_n - C$ auch obere Dreiecksmatrix

$$\mathrm{charpol}_C = (X - c_{11})(X - c_{22}) \cdot \ldots \cdot (X - c_{nn}).$$

Allgemeine Form des charakteristischen Polynoms

Beim K Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \in M_n(K)$ $\det(XE_n - A)$

$\rightsquigarrow$ $\text{charpol}_A = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$\uparrow$ normiert vom Grad n

und $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$.

denn $a_0 = \text{charpol}_A(0)$

$= \det(0 \cdot E_n - A)$

$= \det(-A) = (-1)^n \det(A)$

Trigonalisierbarkeit
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten

K Körper, V endl.-dim'l K-VR, $f: V \to V$, $\chi = \mathrm{charpol}_f$

Satz Sei $\lambda \in K$. Dann gilt λ EW von $f \iff \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$

$\iff \chi(\lambda) = 0 \iff \mathrm{mult}_\lambda(\chi) > 0$.

und in diesem Fall gilt

$$\underbrace{\dim V_\lambda(f)}_{\text{"geometrische Vielfachheit"}} \leq \underbrace{\mathrm{mult}_\lambda(\chi)}_{\text{"algebraische Vielfachheit des EW } \lambda \text{ von } f}.$$

Beweis Sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $V_\lambda(f)$. Wir ergänzen diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ von V $(n = \dim V)$.

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & D \end{array}\right), \qquad r$$

also

$$\chi = \det\left(X E_n - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} X E_r - \lambda E_r & -B \\ \hline 0 & X E_{n-r} - D \end{array}\right)$$

$$= (X-\lambda)^r \cdot \det\left(X E_{n-r} - D\right)$$

$$\Rightarrow \quad (X-\lambda)^r \mid \chi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{mult}_\lambda(\chi) \geq r = \dim V_\lambda(f).$$

Quiz

Bestimmen Sie algebraische und geometrische Vielfachheit aller EW der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 2 & \\ & & 0 & 3 \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

(alle Einträge, die nicht hingeschrieben sind, sind $= 0$).

Quiz

Bestimmen Sie algebraische und geometrische Vielfachheit aller EW der Matrix

EW λ	$\text{mult}_\lambda(\text{charpol})$	$\dim V_\lambda$
0	3	1
-1	1	1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 2 & \\ & & 0 & 3 \\ & & & -1 \end{pmatrix} = A \in M_4(\mathbb{C})$$

(alle Einträge, die nicht hingeschrieben sind, sind $= 0$).

Diagonalisierbarkeit und charakteristisches Polynom

K Körper, V endlichdim'l VR, $f : V \to V$

Satz Dann sind äquivalent: (i) f diagonalisierbar

(ii) $\mathrm{charpol}_f$ zerfällt vollst. in Linearfaktoren und für alle EW λ von f gilt

$$\dim V_\lambda(f) = \mathrm{mult}_\lambda(\mathrm{charpol}_f)$$

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii). Einfach

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen EW von f.

Dann gilt: f diag'bar $\Leftrightarrow$ $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}(f)$ $\Leftrightarrow$ $\dim V = \sum_i \dim V_{\lambda_i}(f)$.

Weil $\mathrm{charpol}_f$ vollst. in LF zerfällt und seine Nullstellen genau die Elem. $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ sind, gilt

$$\deg \mathrm{charpol}_f = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{mult}_{\lambda_i}(\mathrm{charpol}_f).$$

Also $$\dim V = \deg \mathrm{charpol}_f = \sum_{i} \mathrm{mult}_{\lambda_i}(\mathrm{charpol}_f) = \sum_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i}(f)$$

Trigonalisierbare Endomorphismen

K Körper
V endlichdim'l K-VR
$n \in \mathbb{N}$

Def. (1) Ein Endom. $f: V \to V$ heißt trigonalisierbar, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, s.d. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(2) Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt trigonalisierbar, wenn A zu einer oberen Dreiecksmatrix konjugiert ist, d.h., wenn $S \in GL_n(K)$ ex., so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Quiz

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und A eine trigonalisierbare Matrix in $M_n(K)$.
Zeigen Sie, dass A einen Eigenvektor besitzt.

Sei K ein Körper und sei $A \in M_2(K)$.
Beweisen Sie: A ist genau dann trigonalisierbar, wenn A einen Eigenvektor hat.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass dieselbe Aussage für (3×3)-Matrizen nicht wahr ist.

Quiz

Seien K ein Körper, $n \geq 1$ und A eine trigonalisierbare Matrix in $M_n(K)$.
Zeigen Sie, dass A einen Eigenvektor besitzt.

χ_{pol_A} zerfällt vollst. in Linearfaktoren, hat also mindestens eine Nullstelle in K

Sei K ein Körper und sei $A \in M_2(K)$.

$\mathcal{E}$ Standardbasis von K^2

Beweisen Sie: A ist genau dann trigonalisierbar, wenn A einen Eigenvektor hat.

noch zu zeigen: A hat EV b_1 $\Rightarrow$ A trigonalisierbar

Begr.: Ergänze b_1 zu Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$.

Für $S = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ gilt $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass dieselbe Aussage für (3×3)-Matrizen nicht wahr ist.

Seien $K = \mathbb{Q}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Dann ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein EV von A, aber

$\chi_{pol_A} = X(X^2+1)$ zerfällt über $\mathbb{Q}$ nicht vollst. in LF.

$\mathrm{charpol}_f$ für $V = U \oplus W$, $f(U) \subseteq U$

Lemma K Kp., V endldim K-VR, $f : V \to V$ Endom.

Seien $U, W \subseteq V$ UVR mit $V = U \oplus W$ und $f(U) \subseteq U$.

Sei $g : U \to U$, $u \mapsto f(u)$ die Einschränkung von f auf U $(f_{|U})$

$h : W \to W$, $w \mapsto \pi(f(w))$

wobei $\pi : V = U \oplus W \to W$, $u + w \mapsto w$ ($u \in U$, $w \in W$)

Projektion auf W

Dann gilt $\mathrm{charpol}_f = \mathrm{charpol}_g \cdot \mathrm{charpol}_h$.

Trigonalisierbarkeit und charakteristisches Polynom

Satz K Körper, V endlichdim K-VR, $f: V \to V$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist trigonalisierbar

(ii) $\mathrm{charpol}_f$ zerfällt vollst. in Linearfaktoren.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Einfach.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\dim V > 0$. Weil $\mathrm{charpol}_f$ vollst. in LF zerfällt und Grad $= \dim V > 0$ hat, hat $\mathrm{charpol}_f$ eine Nullstelle $\lambda \in K$, dies ist ein EW von f. Sei $v \in V_\lambda(f) \setminus \{0\}$.

Wir ergänzen $v =: b_1$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ von V.

Es sei $U = \langle b_1 \rangle$, $W = \langle b_2, \dots, b_n \rangle \subset V$, also $U \oplus W = V$.

$\Longrightarrow$ (Lemma) $\quad \mathrm{charpol}_f = (X - \lambda) \cdot \mathrm{charpol}_h$, $\quad h : W \to W$ wie im Lemma.

Weil $\mathrm{charpol}_f$ vollst. in LF zerfällt, gilt das auch für $\mathrm{charpol}_h$.

Per Induktion: $h \in \mathrm{End}_K(W)$ trigonalisierbar.

Es ex. also eine Basis $\mathcal{C} = (c_2, \dots, c_n)$ von W, so dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h)$ obere Dreiecksmatrix ist.

Sei $\mathcal{B}' = (b_1, c_2, \dots, c_n)$. Dann ist $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) =$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

eine obere Dreiecksmatrix.

Spur und charakteristisches Polynom
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Die Spur einer Matrix

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ heißt

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die Spur der Matrix A.

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Spur} : M_n(K) \longrightarrow K$, linear: $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$

$\mathrm{Spur}(aA) = a\,\mathrm{Spur}(A)$ $(a \in K)$

(Es gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$

$\rightsquigarrow$ zueinander konjugierte Matrizen haben dieselbe Spur: $\mathrm{Spur}(SAS^{-1}) = \mathrm{Spur}(AS^{-1}S) = \mathrm{Spur}(A)$)

Spur und charakteristisches Polynom

K Kp., $n \in \mathbb{N}$.

Satz. Sei $A \in M_n(K)$ mit $\mathrm{charpol}_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$.

Dann gilt: $a_{n-1} = -\mathrm{Spur}(A)$.

Beweis Drücke $\mathrm{charpol}_A = \det(XE_n - A)$ mit der Leibniz-Formel.

Es kann einen Beitrag zum Koeff. von X^{n-1} nur für solche $\sigma \in S_n$ geben, für die $\sigma(i) = i$ für alle bis auf höchstens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Das gilt nur für $\sigma = \mathrm{id}$. Daher ist der Beitrag in der Leibniz-Formel gleich $(X - a_{11}) \cdot \ldots \cdot (X - a_{nn})$.

wo $A = (a_{ij})_{ij}$

Die Spur eines Endomorphismus

Es folgt: zueinander konjugierte Matrizen haben dieselbe Spur.

Also: ist V ein endl.-dim'l K-VR und $f: V \to V$ ein Endom.,

dann ist $\mathrm{Spur}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right)$ unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.

Deshalb können wir in dieser Situation definieren: $\mathrm{Spur}(f) := \mathrm{Spur}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right) \in K$

"Spur des Endom. f"

Quiz

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei V der K-Vektorraum der Polynome vom Grad $< n$, also

$$V = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i;\ a_i \in K \right\} \subseteq K[X]$$

Für $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in V$ sei

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n-1} i a_i X^{i-1}.$$

Berechnen Sie die Spur des Endomorphismus $D\colon V \to V$ von V.

Quiz

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei V der K-Vektorraum der Polynome vom Grad $< n$, also

$$V = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i ;\ a_i \in K \right\} \subseteq K[X]$$

Für $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in V$ sei

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n-1} i a_i X^{i-1}.$$

Berechnen Sie die Spur des Endomorphismus $D\colon V \to V$ von V.

Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^{n-1})$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ hat Spur 0. $\quad \chi_D = X^n \quad \Leftarrow$ nächste Woche $\quad D^n = 0$.

Ergänzung

Ist K ein Körper der Charakteristik 0 z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
(d.h. dass der Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to K$ injektiv ist),
dann kann man zeigen:

Sind $A, B \in M_n(K)$ Matrizen mit $\mathrm{Spur}(A^i) = \mathrm{Spur}(B^i)$ für alle $i \geq 0$, dann gilt

$$\mathrm{charpol}_A = \mathrm{charpol}_B.$$

Das Minimalpolynom
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Vorüberlegung zum Minimalpolynom

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

Ist $A \in M_n(K)$, dann existiert $p \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $p(A) = 0$.

Denn der Einsetzungshomom. $\Phi : K[X] \longrightarrow M_n(K)$, $X \longmapsto A$

ist auch K-VR-Homom., und $K[X]$ ist als K-VR unendlichdim.

Weil $M_n(K)$ endliche Dimension hat, kann Φ nicht injektiv sein,

es existiert also $p \in \ker(\Phi) \setminus \{0\}$

vg. Hausaufgabe 1.4

Definition: Minimalpolynom einer Matrix

K $n \in \mathbb{N}$.

Sei $A \in M_n(K)$. Sei $\Phi : K[X] \to M_n(K)$, $X \mapsto A$, Einsetzungshomom.

Dann ist $\ker(\Phi) \leq K[X]$ ein von 0 verschiedenes Ideal.

Weil $K[X]$ ein Hauptidealring ist, ex. $p \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $\ker(\Phi) = (p)$.

Wir können annehmen, dass p normiert ist; dadurch ist p dann eind. bestimmt.

Def. Das eind. best. normierte Polynom, das das Ideal $\ker(\Phi)$ erzeugt, heißt das Minimalpolynom der Matrix A. Bezeichnung $\mathrm{minpol}_A \in K[X]$

Äquivalent. minpol_A ist das eind. best. normierte Polynom $\neq 0$ kleinsten Grades, das bei Einsetzen von A die Nullmatrix liefert.

Definition: Minimalpolynom einer Matrix

Ist $q \in K[X]$ irgendein Polynom mit $q(A) = 0$, dann $\left[q \in \ker(\Phi) = (\mathrm{minpol}_A) \right]$

gilt $\mathrm{minpol}_A \mid q$.

Quiz

Sei K ein Körper. Berechnen Sie die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(K).$$

$$D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in M_n(K)$$

Quiz

Sei K ein Körper. Berechnen Sie die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(K).$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = 0$

$\rightsquigarrow \text{minpol}_A = X^3$

Für $p \in K[X]$ ist $p(D) = \text{diag}(p(a_1), \dots, p(a_n))$.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Einträge von D auf der Diagonalen ($r \leq n$).

$$D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n(K)$$

Dann gilt $\text{minpol}_D = (X - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (X - \lambda_r)$.

Quiz

Sei K ein Körper. Geben Sie $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_n(K)$ mit Minimalpolynom $(X-1)^3$ an.

Quiz

Sei K ein Körper. Geben Sie $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_n(K)$ mit Minimalpolynom $(X-1)^3$ an.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $A - E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dann gilt $(A - E_n)^3 = 0$, $(A - E_n)^2 \neq 0$, also $\operatorname{minpol}_A = (X-1)^3$.

Definition: Minimalpolynom eines Endomorphismus

K K_p.

V endlich dim'l k-VR, $f \in \mathrm{End}_k(V)$

Dann ist $\Phi : k[X] \longrightarrow \mathrm{End}_k(V)$ nicht injektiv,

$$X \longmapsto f$$

$$\left[\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & a \cdot \mathrm{id}_V \\ a & & \\ k & & \end{array} \right]$$

und das eind. bestimmte normierte Polynom $p \in k[X]$ mit $\ker(\Phi) = (p)$

heißt das Minimalpolynom von f, geschrieben $\mathrm{minpl}_f \in k[X]$.

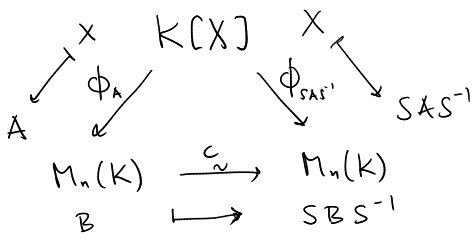
Minimalpolynom und konjugierte Matrizen

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

Lemma Seien $A \in M_n(K)$ und $S \in GL_n(K)$.
Dann haben A und SAS^{-1} dasselbe Minimalpolynom.

Beweis Für $p \in K[X]$ gilt $p(SAS^{-1}) = S \cdot p(A) \cdot S^{-1}$,
insbesondere gilt $p(SAS^{-1}) = 0 \iff p(A) = 0$

Alternativ:

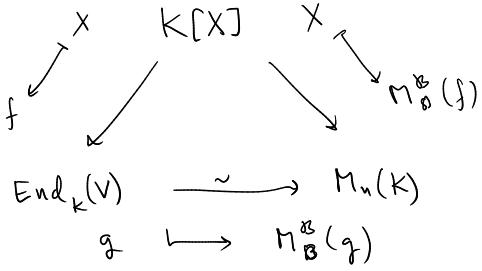


"kommutatives Diagramm"
(d.h. $\phi_{SAS^{-1}} = c \circ \phi_A$)

c Ringisomorphismus

$\rightsquigarrow \ker(\phi_A) = \ker(\phi_{SAS^{-1}})$

Lemma V endl.-dim'l k-VR mit Basis $\mathcal{B}$, $f : V \to V$ Endom.

Dann gilt $\operatorname{minpol}_f = \operatorname{minpol}_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}$.

Beweis