

Wiederholung und Zusammenfassung

Vorlesungswoche 15

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Eigenwerttheorie und Jordansche Normalform

Vorlesungswoche 15

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Fragestellung

K Körper, V endlichdim K -VR, $n = \dim V$

$f: V \rightarrow V$ Endomorphismus / $A \in M_n(K)$

Frage. Existiert Basis $\mathcal{B}$ von V , so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ "möglichst einfach" ist?

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Z}} M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}(f) M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{B}}}_{= (M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{B}})^{-1} M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}}(f) M_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom

$$K, \quad V, \quad f: V \rightarrow V, \quad n = \dim V$$

$$\text{charpol}_f := \text{charpol}_A = \det(X E_n - A) = X^n - \text{Spur}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \text{ für irgendeine Basis } \mathcal{E} \text{ von } V \quad \in K[X]$$

$$\text{Für } \lambda \in K: \quad \text{charpol}_f(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \text{EW von } f$$

$$(\text{außerdem: } \dim V_{\lambda} \leq \text{mult}_{\lambda}(\text{charpol}_f))$$

Äquivalenz:

(i) f trigonalisierbar, d.h. es ex. Basis $\mathcal{B}$ von V
s.d. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ obere Dreiecksmatrix ist

(ii) charpol_f zerfällt vollständig in Linearfaktoren

Das Minimalpolynom

$$K, \quad V, \quad f: V \rightarrow V$$

Das Minimalpolynom minpol_f von f ist das (eind. bestimmte) normierte Polynom p kleinsten Grades mit $p(f) = 0$ ($\in \text{End}_K(V)$)

Dann gilt: für $q \in K[X]$: $q(f) = 0 \iff \text{minpol}_f \mid q$.

[m.c.W.: minpol_f ist das (eind. best.) normierte Polynom, das den Kern des Einsetzungshomom.

$$\begin{aligned} K[X] &\rightarrow \text{End}_K(V) && \text{erzeugt} \\ X &\mapsto f \end{aligned}$$

Der Satz von Cayley-Hamilton

K, V, f

- Es gilt $\text{charpol}_f(f) = 0$ ($f \in \text{End}_K(V)$)

äquiv. • $\text{minpol}_f \mid \text{charpol}_f$

Außerdem gilt: für $\lambda \in K$ gilt: $\text{minpol}_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \text{charpol}_f(\lambda)$

(sogar: $\text{minpol}_f, \text{charpol}_f$ haben dasselbe irreduzible Polynom $\in K[X]$ als Teiler)

Satz Die folg. Eig. sind äquivalent

- (i) f diagonalisierbar, d.h. es ex. Basis B von V , s.d. $M_B^B(f)$ Diagonalmatrix
- (ii) es existiert eine Basis B von V , die aus EV von f besteht
- (iii) V ist die (direkte) Summe der ER von f
- (iv) charpol_f erfüllt vollst. in LF und für jede Nullst. λ von charpol_f gilt $\dim V_\lambda = \text{mult}_\lambda(\text{charpol}_f)$
- (v) minipol_f erfüllt vollst. in LF und hat nur einfache Nullstellen.

Die Jordansche Normalform

$K, V, f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar

Jordan - Blöcke

$r > 0$

$\lambda \in K$

$$J_{r,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_r(K)$$

A hat Jordansche Normalform (JNF): $A = \text{diag}(J_{r_1,\lambda_1}, \dots, J_{r_s,\lambda_s})$

Block-Diagonalmatrix

Theorem f trig. $\Rightarrow$ es ex. Basis B von V ,

s.d. $M_B^B(f)$ JNF hat, und die Paare (r_i, λ_i) sind
bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Die Jordansche Normalform - Eindeutigkeit

$$\begin{aligned} \leadsto \dim \ker \left((f - \lambda \operatorname{id}_V)^i \right) &= \dim \ker \left((f - \lambda \operatorname{id}_V)^{i-1} \right) \\ &= \text{Anzahl der Jordan-Blöcke der Größe } \geq i. \end{aligned}$$

Vorüberlegung

- $\operatorname{rg} J_{r,0}^i = \begin{cases} r-i, & 0 \leq i \leq r \\ 0, & i \geq r \end{cases}$
- $J_{r,\lambda} - \lambda \cdot E_r = J_{r,0}$

Falls $A = \operatorname{diag} (J_{r_1, \lambda_1}, \dots, J_{r_s, \lambda_s})$,

und sind $\mu_1, \dots, \mu_t$ die paarw. versch. EW von A ($t \leq s$), so gilt

$$\operatorname{Charpol}_A = \prod_{i=1}^t (X - \mu_i)^{n_i},$$

n_i = Summe der Größen der J-Blöcke zum EW μ_i

$$\operatorname{minopol}_A = \prod_{i=1}^t (X - \mu_i)^{m_i},$$

m_i = Größe des größten J-Blockes zum EW μ_i

Die Jordansche Normalform - Existenz

(1) Zerlegung von V in "verallgemeinerte Eigenräume"

$$V = \bigoplus_{i=1}^t \tilde{V}_{\mu_i}, \quad \mu_1, \dots, \mu_t \text{ die paarw. versch. EW von } f$$

$$(\tilde{V}_{\mu} = \bigcup_{i \geq 0} \text{Ker}(f - \mu \cdot \text{id}_V)^i = \text{Ker}(f - \mu \cdot \text{id}_V)^m, \quad m = \text{mult}_{\mu}(\text{minpol}_f))$$

"verallg. ER zum EW μ "

(2) Existenz der JNF für f nilpotent

$$M_{\mathbb{K}}^{\mathbb{K}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ \hline & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{smallmatrix}} & \\ \hline & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{smallmatrix}} \end{array} \right)$$

$$b_{r_1} \mapsto b_{r_1-1} \mapsto b_{r_2-1}$$

$$\downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ b_1 \\ \downarrow \\ 0$$

Die Jordan-Zerlegung

$K, V, f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar.

Dann ex. Endom. $D, N \in \text{End}_K(V)$ mit

- $f = D + N$
- D diagonalisierbar
- N nilpotent,
- $D \circ N = N \circ D$

und D, N sind eindeutig bestimmt.

$$A = \text{diag}(J_{r_1, \lambda_1}, \dots, J_{r_s, \lambda_s})$$

$$\textcircled{*} = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s})$$

$$+ \text{diag}(J_{r_1, 0}, \dots, J_{r_s, 0})$$

Berechnung der Jordan-Zerlegung:

- finde B s.d. $M_B^B(f)$ JNF $\leadsto$ Zerlegung wie in (*)

alternativ • Zerlegg n versch. $\mathbb{R}$, $D|_{V_\lambda} = \lambda \cdot \text{id}_{V_\lambda}$, $N = A - D$

alternativ • Berechne $p_d \in K[X]$ mit $p_d \equiv \mu_i \pmod{(X - \mu_i)^{m_i}}$
für die paarw. versch. EW $\mu_1, \dots, \mu_t$ von f ,
 $m_i = \text{mult}_{\mu_i}(\text{minipol } f)$

$$\text{Dann } D = p_d(A)$$

$$N = A - D$$

$$(p_d \equiv 0 \pmod{X})$$

Quotientenvektorraum und Dualraum

Vorlesungswoche 15

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Nebenklassen eines Untervektorraums

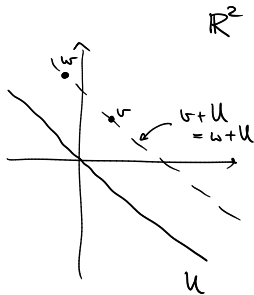
K Körper,

$$V \text{ VR} / K, \quad u \in V \quad u \in U$$

$$\text{Nebenklasse von } u: \quad v + U = \{v + u; u \in U\}$$

$$(\text{= Äquivalenzklassen bzgl. } v \sim w \iff v - w \in U)$$

$$V/U := \text{Menge aller Nebenklassen von } U \text{ in } V.$$



Addition von Nebenklassen

Ziel VR-Struktur auf $V/U = \{v+U; v \in V\}$

s.d. die Abbildung $\pi: V \rightarrow V/U$
 $v \mapsto v+U$ VR-Homom. ist.

Muss gelten

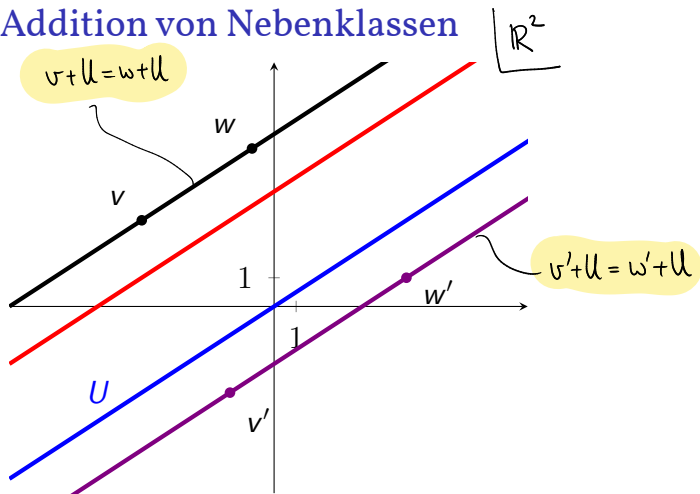
$$(v+U) + (v'+U) = \pi(v) + \pi(v') = \pi(v+v')$$

$$= (v+v') + U$$

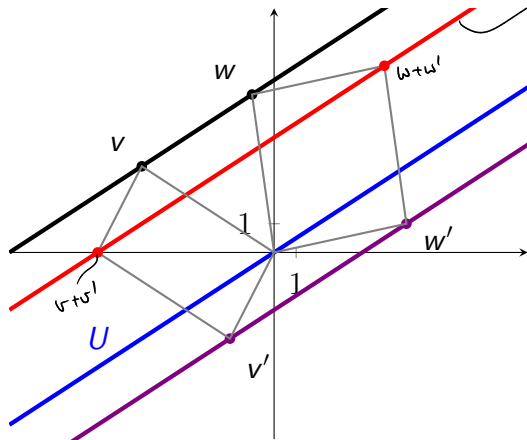
Frage Ist diese Vorschrift wohldefiniert?

Ja (leichte Rechnung)

Addition von Nebenklassen



Addition von Nebenklassen



$$(v+v') + U =$$
$$(w+w') + U$$

Der Quotientenvektorraum

V/U ist K -VR mit Add. $(v+U) + (v'+U) := (v+v') + U$ $v, v' \in V$
Skalarmult. $a \cdot (v+U) = (av) + U$ $a \in K$

und die "kanonische Projektion" $\pi: V \rightarrow V/U$
 $v \mapsto v+U$

ist ein surjektiver VR-Homom. mit Kern U .

Der Homomorphiesatz

$K, V, U \subseteq V$ UVR,

$\pi: V \rightarrow V/U$ kanonische Proj.

Sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus.

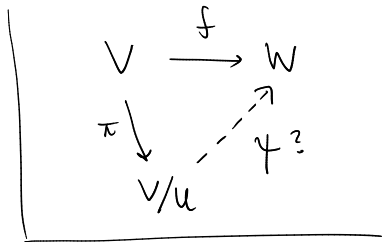
Dann sind äquivalent:

(i) Es ex. $\varphi: V/U \rightarrow W$ mit $f = \varphi \circ \pi$

(ii) $U \subseteq \text{Ker}(f)$

In diesem Fall ist φ eindeutig bestimmt (durch $\varphi(v+U) = f(v)$) und

$\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(f)$ und φ injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = U$.



Quotient und Komplementärräume

$$K, V, U \subseteq V \quad U \perp V$$

Sei $W \subseteq V$ ein Komplementärraum zu U .  muss eine Wahl treffen

Dann ist die Abbildung $W \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} V/U$

ein VR-Isomorphismus.

Ist $p: V = U \oplus W \rightarrow W$ die Projektion $p(u+w) = w$
($u \in U, w \in W$),

dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ p \swarrow & & \searrow \pi \\ W & \xrightarrow{\sim} & V/U \end{array}$$

Quotienten von Gruppen, Ringen

Analoge Konstruktion

- G Gruppe, $H \subseteq G$ Normalteiler (Untergr. s.d. $gH = Hg$ für alle $g \in G$)

$\rightarrow G/H := \{gH; g \in G\}$ Gruppe, s.d. $G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$,
surj. Gruppenhomom. mit Kern H

- R Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ Ideale $\rightarrow R/\mathfrak{a}$ Ring, s.d. $R \rightarrow R/\mathfrak{a}$
 $x \mapsto x + \mathfrak{a}$

surjektiver Ringhomom. mit Kern $\mathfrak{a}$.

Definition des Dualraums

K Körper,

V ein K -VR.

Dann heißt $V^\vee := \text{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum von V .

Beispiel • $V = K^n$: $(K^n)^\vee = \text{Hom}(K^n, K) = M_{1 \times n}(K)$

Die duale Basis

V mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$

$\leadsto b_i^\vee \in V^\vee$ definiert durch $b_i^\vee(b_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$

denn ist $\underbrace{(b_1^\vee, \dots, b_n^\vee)}_{B^{\vee\prime\prime}}$ Basis von $V^\vee$, die sog. duale Basis

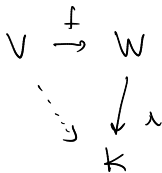
Insbes.: Falls V endlichdim., dann $\dim V^\vee = \dim V$.

Die duale Abbildung

$$f: V \rightarrow W \quad \text{VR-Homom.}$$

$$\leadsto f^\vee: W^\vee \rightarrow V^\vee, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ f,$$

lineare Abb., die sog. duale Abb. zu f .



Gilt: $(f \circ g)^\vee = g^\vee \circ f^\vee$

Falls	B	Basis von V mit dualer Basis $B^\vee$	:	$M_{B^\vee}^{e^\vee}(f^\vee) = M_e^B(f)^t$
	C	Basis von W mit dualer Basis $C^\vee$		

Eigenschaften der dualen Abbildung

$$f: V \rightarrow W$$

- f surjektiv $\Leftrightarrow f^\vee$ injektiv



$$\operatorname{rg} M_e^p(f) = \dim V \Leftrightarrow \operatorname{rg} M_{B^\vee}^{e^\vee}(f^\vee) = \dim V^\vee$$

$\left. \begin{array}{l} V, W \\ \text{endlich-dim} \end{array} \right\}$

B, e

- f injektiv $\Leftrightarrow f^\vee$ surjektiv

- $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^\vee)$

Der Doppeldualraum

V K -VR

$$\leadsto V \longrightarrow (V^\vee)^\vee, \quad v \mapsto \left(\begin{array}{c} V^\vee \xrightarrow{\text{ev}_v} K \\ \lambda \mapsto \lambda(v) \end{array} \right),$$

injektiv VR-Homom.

Falls V endlichdim., dann ist $V \rightarrow V^{\vee\vee}$ ein VR-Isomorphismus.

Bilinearformen und Sesquilinearformen

Vorlesungswoche 15

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Bilinearformen, Sesquilinearformen

K Körper, V VR über K

Sei $a \mapsto \bar{a}$ ein Körperautomorphismus $K \rightarrow K$ mit $\overline{\bar{a}} = a$ für alle a .

[Beispiel: • $\bar{a} = a$ für alle a • $K = \mathbb{C}$, $\bar{a}$ die zu komplex konj. Zahl]

Eine Abb. $\beta: V \times V \rightarrow K$ heißt Sesquilinearform auf V , wenn sie
im ersten Eintrag sesquilinear (bzgl. $\bar{\cdot}$) und im zweiten Eintrag linear ist, d.h.

Spezialfall $\bar{a} = a \quad \forall a \in K$

"Bilinearform"

$$\beta(av + a'v', w) = \bar{a} \beta(v, w) + \bar{a'} \beta(v', w)$$

$$\beta(v, aw + a'w') = a \beta(v, w) + a' \beta(v, w')$$

$$\beta(av + a'v', w) = a \beta(v, w) + a' \beta(v', w)$$

$$\beta(v, aw + a'w') = a \beta(v, w) + a' \beta(v, w')$$

Die Strukturmatrix

V mit $B = (b_1, \dots, b_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sesqui linear formen} \\ V \times V \xrightarrow{\beta} K \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\sim} M_n(K)$$

VR-Isom.

β

$$\longmapsto M_B(\beta) := \left(\beta(b_i, b_j) \right)_{i,j}$$

"Strukturmatrix von β "

$$((v, w) \mapsto v^* B w)$$

$$\longleftarrow B$$

Notation:

$$A^* := \overline{A}^t$$

Eigenschaften von Bilinearformen / Sesquilinearformen Strukturtheorie

- hermitisch : $\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)}$ $M_B(\beta)^* = M_B(\beta)$

$\beta(v, w) = \beta(w, v)$
"symmetrisch"
- nicht-ausgeartet : $M_B(\beta)$ invertierbar.

$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists w \in V : \beta(v, w) \neq 0$
 $\forall w \in V \setminus \{0\} \exists v \in V : \beta(v, w) \neq 0$

- positiv definit

$$\text{Sei } K = \mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} & (\text{mit } \bar{a} = a) \\ \mathbb{C} & (\text{mit } \bar{a} \text{ komplexes Konj.}) \end{cases}$$

$$\text{Sei } \beta \text{ hermitisch} \quad (\leadsto \beta(v, v) = \overline{\beta(v, v)}, \text{ d.h. } \beta(v, v) \in \mathbb{R})$$

β heißt positiv definit, falls $\beta(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$.

Eine pos. def. hermitesche SLF auf einem $\mathbb{K}$ -VR heißt Skalarprodukt.

Ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -VR zusammen mit einem Skalarprodukt heißt euklidischer VR, Ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$ -VR zus. mit einem Skalarprodukt heißt unitärer Vektorraum.

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

$n \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \text{ auf } \mathbb{R}^n: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\bullet \text{ auf } \mathbb{C}^n: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Skalarfunktion bzgl.} \\ \text{Standardbasis} \\ = E_n \end{array}$$

Allg. Fall: $(\cdot, \cdot)$ SP auf $V \rightarrow \|v\| := \sqrt{(v, v)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Norm (Länge) von v

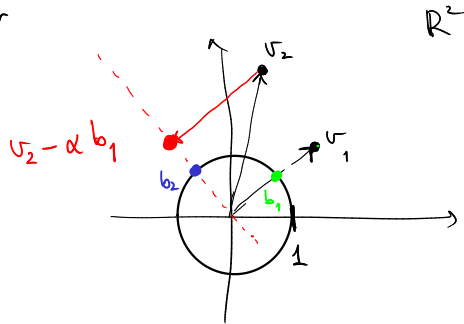
Ungleichung von Cauchy-Schwarz: $|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$. Dreiecksungleichung:
 $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Existenz von Orthonormalbasen

V ^{endlich} $\mathbb{K}$ -VR mit SP β

Dann ex. Basis B von V , s.d. $M_B(\beta) = E_n$ ("B Orthonormalbasis")

Gramm, Satz / Verfahren von Gram-Schmidt



Der adjungierte Endomorphismus

V $\mathbb{K}$ -VR mit SP $(\cdot, \cdot)$

$f: V \rightarrow V$ Endom.

Dann ex. eund. VR-Endom. $f^*, V \rightarrow V$, s.d. für alle $v, w \in V$:

$$(f(v), w) = (v, f^*(w))$$

f^* heißt der zu f adjungierte Endomorphismus.

Gilt dann auch $(v, f(w)) = (f^*(v), w)$

$$(f+g)^* = f^* + g^*, \quad (\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^* \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Spektralsätze für normale und selbstadjungierte Endomorphismen

- f normal $\Leftrightarrow f \circ f^* = f^* \circ f$

Spektralsatz für normale Endomorphismen. Sei f normal und trigonalisierbar.
Dann ex. eine ONB von V , die aus Eigenvektoren von f besteht.

- f selbstadjungiert $\Leftrightarrow f^* = f$ $(\Rightarrow f \text{ normal})$

Spektralsatz für selbstadjungierte Endom. Sei f selbstadjungiert.
Dann ex. eine ONB von V , die aus Eigenvektoren von f besteht.
Alle Eigenwerte von f liegen in $\mathbb{R}$.

Isometrien

V ^{endliche} $\mathbb{K}$ -VR mit SP $(\cdot, \cdot)$

$f: V \rightarrow V$ VR-Endom. heißt Isometrie, falls die folg. äquiv. Eig. gelten:

(i) $\forall v \in V: \|f(v)\| = \|v\|$

(ii) $\forall v, w \in V: (f(v), f(w)) = (v, w)$

(iii) f Isomorphismus und $f^{-1} = f^*$ $(\Rightarrow f \text{ normal})$

$\mathbb{C}$

heißt eine Isometrie auch unitäre Abl., stets diagonalisierbar

$\mathbb{R}$

heißt eine Isometrie auch orthogonale Abl., im allg. nicht diag.

Bsp. Drehungen von $\mathbb{R}^2$,

Normalform: Blockdiagonalisierung $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$
Drehmat. $\in GL_2(\mathbb{R})$

Singulärwertzerlegung und Polarzerlegung

$$A \in M_n(\mathbb{K})$$

Es ex. V, W, Σ :

Singulärwertzerlegung: $A = V \Sigma W^*$, $V, W \in GL_n(\mathbb{K})$
 $V^{-1} = V^*, W^{-1} = W^*$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$$

mit $\sigma_i \in \mathbb{R}_{>0}$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $r = \text{rg}(A)$,

Σ eind. bestimmt.

Polarzerlegung: $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann ex. $U, P \in M_n(\mathbb{K})$

mit $A = UP$ und

• U invertierbar, $U^{-1} = U^*$

• P hermitisch ($P^* = P$) + positiv semidefinit:

$$v^* P v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}^n.$$

Dabei P und bestimmt.

Vergleichen: Polarform.
für komplexe
Zahlen

$$0 \neq z = \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{\substack{\in \mathbb{C} \\ \text{Betrag } 1}} \cdot \underbrace{|z|}_{\in \mathbb{R}_{>0}}$$