Übersicht
Vorlesungswoche 14

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung

$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

Orthogonale/unitäre Matrizen

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ $\left.\begin{array}{l}\text{orthogonal } (\mathbb{K}=\mathbb{R}) \\ \text{unitär } (\mathbb{K}=\mathbb{C})\end{array}\right\}$ falls $A^{-1} = A^*$

$\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l}\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto Av\end{array}$ Isometrie $\Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ONB von $\mathbb{K}^n$

Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

- V endlichdim'l $\mathbb{K}$-VR mit SP, $f: V \to V$ selbstadjungiert
  $\Rightarrow$ es ex. ONB von V aus EV von f (insbes: f diagonalisierbar),
  und alle EW von f liegen in $\mathbb{R}$.
- $A \in M_n(\mathbb{K})$ hermitesch $\Rightarrow$ es ex. $S \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $S^{-1} = S^*$ s.d. S^*AS
  Diagonalmatrix $\in M_n(\mathbb{R})$

Quadriken

$\rightsquigarrow$ geometrischer Gehalt des
Begriff "Hauptachsentransformation"

Die Singulärwertzerlegung

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Dann ex. $V \in GL_m(\mathbb{K})$, $\quad V^{-1} = V^*$

$W \in GL_n(\mathbb{K})$ $\quad W^{-1} = W^*$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

$\sigma_i \in \mathbb{R}$, $\quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $\quad r = \mathrm{rg}(A)$

mit $\quad A = V \Sigma W^*$

Die Polarzerlegung

$A \in M_n(\mathbb{K})$

Dann ex. $U \in GL_n(\mathbb{K})$, $U^{-1} = U^*$ $\quad (\Rightarrow |\det(U)| = 1)$

$P \in M_n(\mathbb{K})$ hermitesch + positiv semidef.

$(v^* P v \geq 0)$

mit $A = UP$

$\boxed{\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C},\ n = 1: \text{ Polarkoordinaten}}$

Quadriken
Vorlesungswoche 14

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition: Quadriken

Eine <u>Quadrik</u> ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ der Form

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 \right\}$$

(für a_{ij}, b_i, $c \in \mathbb{R}$).

Quiz

Skizzieren Sie die folgenden Quadriken:

$$Q_1 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

$$Q_2 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 4y^2 = 1\}$$

$$Q_3 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$$

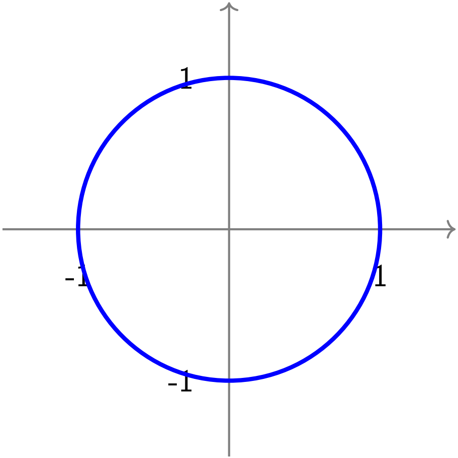
Quiz

Skizzieren Sie die folgenden Quadriken:

$Q_1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$

$= \{ v \in \mathbb{R}^2 ; \quad \|v\| = 1 \}$

"Einheitskreis"

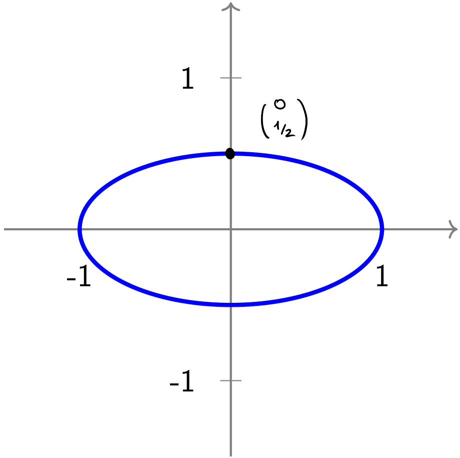


Quiz

Skizzieren Sie die folgenden Quadriken:

$Q_2 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 4y^2 = 1\}$

"Ellipse"



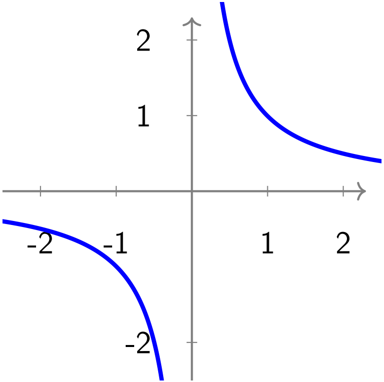
Quiz

Skizzieren Sie die folgenden Quadriken:

$Q_3 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$

$= \{ (x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\quad x \neq 0,\quad y = \frac{1}{x} \}$

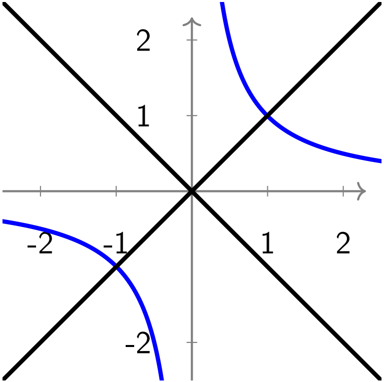
"Hyperbel"



Quiz

Skizzieren Sie die folgenden Quadriken:

$Q_3 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$

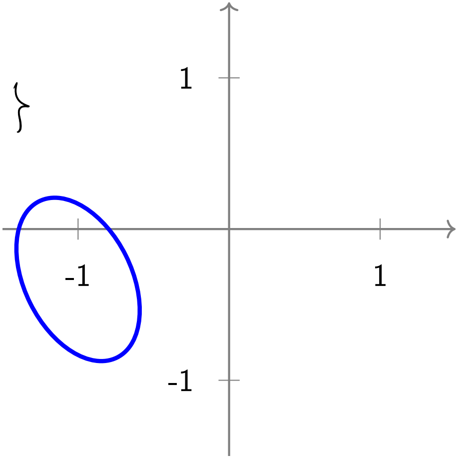


Beispiel

$$\left\{ (x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ;\ \underbrace{7x^2 + 4xy + 4y^2}_{\shortparallel} + \underbrace{\frac{46}{3}x + \frac{20}{3}y} + \frac{70}{9} = 0 \right\}$$

$$7x^2 + 2xy + 2yx + 4y^2$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Beschreibung durch Matrizen

Seien $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch

$b = (b_i)_i \in \mathbb{R}^n$

$c \in \mathbb{R}$.

Dann ist $Q(A, b, c) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \underbrace{x^t A x}_{= \sum a_{ij} x_i x_j} + \underbrace{b^t x}_{= \sum b_i x_i} + c = 0 \}$

eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$

und jede Quadrik hat diese Form.

Die Hauptachsentransformation

Gegeben $Q(A, b, c)$.

Sei $S \in O(n)$ s.d. $D := S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist. („Hauptachsentransformation")

- Können annehmen, dass $\det(S) = 1$ („S ist eine Drehung")

  (sonst ersetze S durch $S \cdot \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$)

- Die Drehung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto S^t x$ $(= S^{-1} x)$

  induziert eine Bijektion $Q(A, b, c) \longrightarrow Q(\underbrace{S^t A S}_{= D}, S^t b, c)$

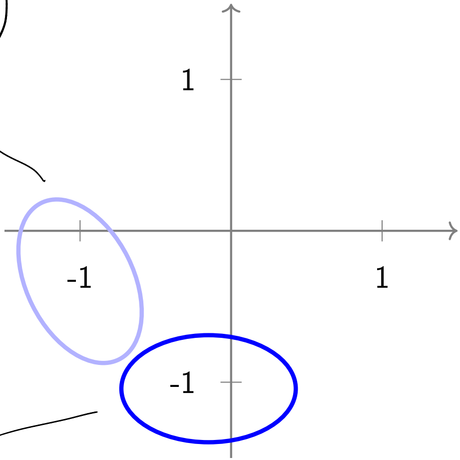
Beispiel

$$Q\left(\overbrace{\begin{pmatrix}7 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}}^{A},\ \frac{2}{3}\begin{pmatrix}23\\ 10\end{pmatrix},\ \frac{70}{9}\right)$$

Dann $\quad S^t A S = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

für $\quad S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \in O(2)$

$$Q\left(\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix},\ \frac{2}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3\\ 56\end{pmatrix},\ \frac{70}{9}\right)$$



Verschiebung

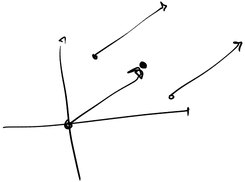
Sei im folgenden A invertierbar, ($D = S^t A S$ wie oben)

$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$

Die Translation $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_i)_i^t \longmapsto \left(x_i + \frac{b_i}{2d_i}\right)_i^t = x + \frac{1}{2} D^{-1} b$,

induziert eine Bijektion

$$Q(D, b, c) \longrightarrow Q\Big(D, 0, \underbrace{c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4 d_i}}_{c - \left(\frac{1}{2} b^t\right) D^{-1} \left(\frac{1}{2} b\right)}\Big)$$

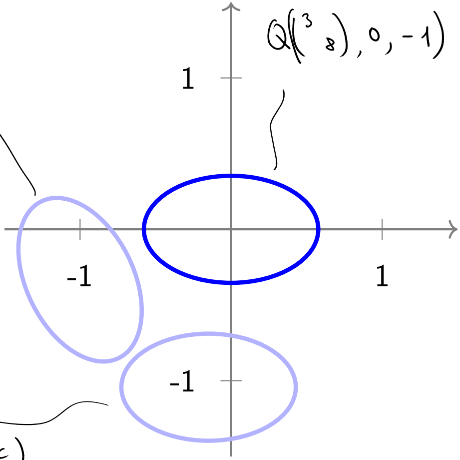


Beispiel

$Q(A, b, c)$

$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$Q\left(\begin{pmatrix} 3 & \\ & 8 \end{pmatrix}, 0, -1\right)$



$$\boxed{\begin{aligned} &Q\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, 0, -1\right) \\ &= \{(x,y)^t \in \mathbb{R} ;\ 3x^2 + 8y^2 = 1\} \end{aligned}}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \frac{2}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 56 \end{pmatrix}, \frac{70}{9}\right) = Q(D, \bullet, c)$$

Ellipsen

$\mathbb{R}^2$, $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$, $d_1, d_2 \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$

$Q = Q(D, 0, c) \quad (= Q(-D, 0, -c))$

$\rightsquigarrow$ OE $d_1 > 0$

1. Fall $\quad d_1 > 0$, $d_2 > 0 \quad \rightsquigarrow$ • $Q(D, 0, c)$ Ellipse, falls $c < 0$

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 = \underbrace{-c}_{>0}$$

• $Q(D, 0, 0) = \{0\}$

• $Q(D, 0, c) = \emptyset$ falls $c > 0$

Hyperbeln

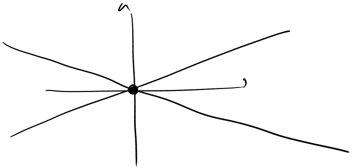
2. Fall $\quad d_1 > 0, \quad d_2 < 0$

$$\underbrace{d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2}_{\parallel} = -c$$

Hyperbel, falls $c \neq 0$

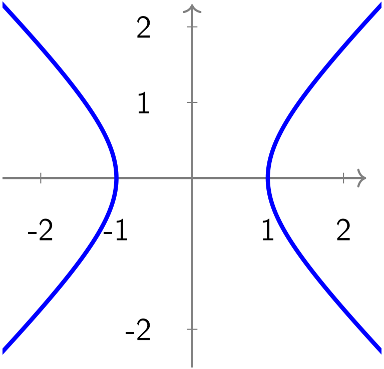
$$\left(\sqrt{d_1}\, x_1 - \sqrt{-d_2}\, x_2\right)\left(\sqrt{d_1}\, x_1 + \sqrt{-d_2}\, x_2\right) = -c$$

Falls $c = 0$, ist $Q(D, 0, 0)$ die Vereinigung von zwei (versch.) Ursprungsgeraden



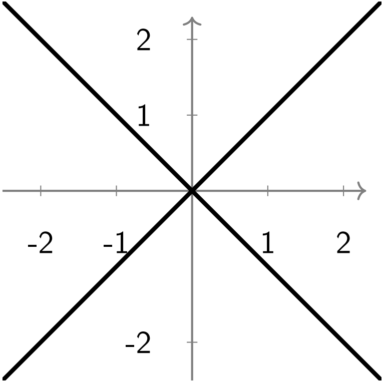
Beispiel

$$Q = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 1\}$$

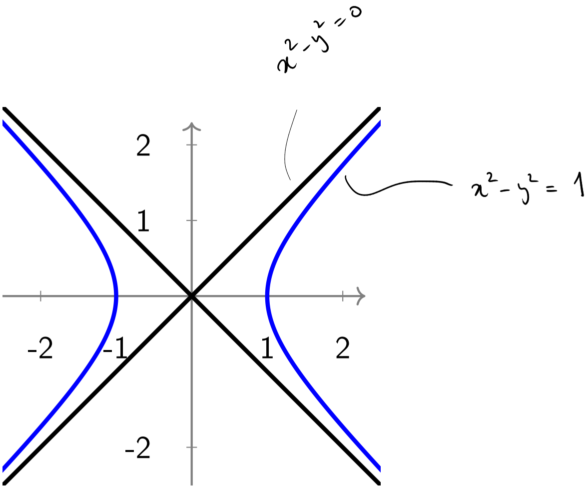


Beispiel

$$Q = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ \overbrace{x^2 - y^2}^{\substack{(x-y)(x+y) \\ \|}} = 0\}$$



Beispiel



Die Singulärwertzerlegung
Vorlesungswoche 14

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die Singulärwertzerlegung

Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Dann existieren Matrizen $V \in GL_m(\mathbb{K})$, $W \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $V^{-1} = V^*$, $W^{-1} = W^*$

und eine Matrix $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

wobei $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $r = \operatorname{rg}(A)$,

so dass

$$A = V \Sigma W^*.$$

Dabei ist die Matrix Σ eindeutig bestimmt. Die Zahlen σ_i heißen die Singulärwerte von A.

Quiz

$v^* B v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$,

d.h. die herm. SLF β mit

$M_\mathcal{E}(\beta) = B$ ist positiv semidefinit

Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Zeigen Sie: $B := A^* A \in M_n(\mathbb{K})$ ist hermitesch und positiv semidefinit.

Zeigen Sie: $\mathrm{Ker}(A^* A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Quiz

Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Zeigen Sie: $B := A^*A \in M_n(\mathbb{K})$ ist hermitesch und positiv semidefinit.

Standard-SP positiv definit

B hermitesch:

$B^* = (A^*A)^* = A^* A^{**} = A^*A = B$

B positiv semidefinit:

$v \in \mathbb{K}^n$, dann $v^*Bv = (Av)^*(Av) \geq 0$

Zeigen Sie: $\mathrm{Ker}(A^*A) = \mathrm{Ker}(A)$.

"$\supseteq$" ist klar.

"$\subseteq$" $A^*Av = 0 \Rightarrow \underbrace{v^*A^*Av}_{= (Av)^*(Av)} = 0 \Rightarrow Av = 0$.

Folgerung: $\mathrm{rg}(A^*A) = \mathrm{rg}(A)$.

Eindeutigkeit der Singulärwerte

Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$,

und sei $A = V \Sigma W^*$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Dann $\underbrace{A^* A}_{\substack{\text{hermitesch,} \\ \text{also diagonalisierbar}}} = W \Sigma^* \underbrace{V^* V}_{= E_m} \Sigma W^* = W \cdot \underbrace{\Sigma^* \Sigma}_{\substack{\| \\ \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) \in M_n(\mathbb{K})}} \cdot W^{-1}$,

d.h. $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ sind genau die

positiven EW von $A^* A$ (mit Vielfachheiten)

Es folgt, dass $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ als die Quadratwurzeln der pos. EW von $A^* A$

eind. bestimmt sind.

Beweis für $A \in GL_n(\mathbb{K})$

Dann ist A^*A hermitesch + pos. semidefinit.

Weil A^*A invertierbar ist, ist A^*A sogar positiv definit.

Spektralsatz $\rightsquigarrow$ $\exists\ W \in GL_n(K)$ orth./unitär : $D := W^*(A^*A)W$ Diagonalmatrix,

$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$

A^*A pos. def $\Rightarrow$ $\forall i: \ d_i > 0$

OE $\quad d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n > 0$ $\quad$ (sonst ersetze W durch WP für geeignete Permutationsmatrix P).

Sei $\quad \sigma_i := \underset{\mathbb{R}_{>0}}{\underset{\cap}{\sqrt{d_i}}}$, $\quad \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, also $\Sigma^2 = D$.

Sei $V = AW\Sigma^{-1}$. Dann gilt $A = V\Sigma W^*$.

Außerdem gilt $V^* = (AW\Sigma^{-1})^* = \Sigma^{-1} W^* A^* = \Sigma^{-1}\Sigma^2 W^{-1} A^{-1}$

$W^* A^* = D W^{-1} A^{-1}$

$= \Sigma W^{-1} A^{-1} = V^{-1}$, also V orth./unitär.

Beweis im allgemeinen Fall

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Dann A^*A hermitesch, pos semidef

$\xrightarrow[\text{Spektralsatz}]{}$ es ex. $W \in GL_n(\mathbb{K})$: $W^* A^* A W =: D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$

$W^{-1} = W^*$ mit $d_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

OE $d_1 \geq \dots \geq d_n \geq 0$

Weil $\operatorname{rg}(A^*A) = \operatorname{rg}(A) =: r$, gilt

$d_1, \dots, d_r > 0$, $d_{r+1}, \dots, d_n = 0$.

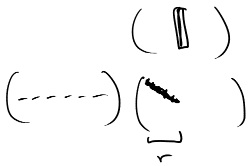
Wir setzen

$\sigma_i := \sqrt{d_i}$, $i = 1, \dots, r$

$\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Also $(AW)^* (AW) = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$



Seien $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von AW

Dann (a) $s_i^* s_j = 0$ $\quad i \neq j$

(b) $s_i^* s_i = \sigma_i^2 > 0$ $\quad i \leq r$

(c) $s_i^* s_i = 0$, also $s_i = 0$, $\quad i > r$

Folglich bilden $b_1 := \frac{1}{\sigma_1} s_1, \dots, b_r := \frac{1}{\sigma_r} s_r$ ein Orthonormalsystem

Ergänze zu ONB $b_1, \dots, b_m$ von $\mathbb{K}^m$. Sei V die Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_m$.

Dann $V \in GL_m(\mathbb{K})$ und $V^{-1} = V^*$ (da $(b_1, \ldots, b_m)$ ONB).

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Behauptung</u>. $A = V \Sigma W^*$

<u>Begründung</u>. Äquivalent können wir zeigen, dass $AW = V\Sigma$

Für die ersten r Spalten: nach Def. von V.

Für die Spalten mit Index $> r$: alle $= 0$.

Quiz

Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung von $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -3 \\ \frac{3}{5} & 4 \end{pmatrix}$.

Quiz

Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung von $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -3 \\ \frac{3}{5} & 4 \end{pmatrix}$.

- $A^* A = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & -3 \\ 3/5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5^2 & \\ & 1^2 \end{pmatrix}}_{\Sigma^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{W}$

- $V = A W \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3 \\ 3/5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Wir erhalten $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ als eine SWZ von A.

Die Polarzerlegung
Vorlesungswoche 14

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die Singulärwertzerlegung (umformuliert)

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, dann $A = V \Sigma W^*$ mit $V \in GL_m(\mathbb{K})$,
$W \in GL_n(\mathbb{K})$,
$V^{-1} = V^*$, $W^{-1} = W^*$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathbb{R}_{>0}$,
$r = \operatorname{rg}(A)$,
$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$

Es gilt

$$V \Sigma W^* = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j v_j w_j^*$$

wobei $v_1, \dots, v_m$ die Spalten von V
und $w_1, \dots, w_n$ die Spalten von W seien

Die Matrix $\sigma_j v_j w_j^*$ hat Rang 1

Für $k \leq r$ hat $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j v_j w_j^*$ Rang k.

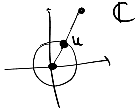
Dies ist eine "gute Approximation von A durch eine Matrix von Rang k",

kann "abgespeichert werden" als Tupel von $k \cdot (1 + m + n)$ Zahlen

(Für A selbst ("naiv"): mn Zahlen.)

Die Polarzerlegung

Wir nennen eine hermitesche Matrix $P \in M_n(\mathbb{K})$ positiv (semi-) definit, falls $v^* P v > 0$ $\left(v^* P v \geq 0 \right)$ $\forall v \in \mathbb{K}^n$



Polarkoordinaten:

$z \in \mathbb{C}^\times$

Dann ex. $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$

$u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$

s.d. $z = \rho \cdot u$

(nämlich $\rho = |z|$, $u = \frac{z}{|z|}$).

Es ist $u = \exp(i\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Die Polarzerlegung

Satz Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(1) Es ex. eine orth./unitäre Matrix $U \in GL_n(\mathbb{K})$ und eine eind. bestimmte pos. semidef. hermitesche Matrix $P \in M_n(\mathbb{K})$ mit $A = UP$

(2) Ist A invertierbar, so ist P pos. definit und auch U eind. bestimmt.

Existenz

Sei $A = V\Sigma W^*$ eine Singulärwertzerlegung von A

Sei $U := VW^*$, $P = W\Sigma W^*$

Dann gilt $UP = V\underbrace{W^* W}_{= E_n}\Sigma W^* = V\Sigma W^* = A$.

und U, P haben die gewünschten Eigenschaften.

Ist A invertierbar, so ist Σ eine Diagonalmatrix mit positiven reellen Zahlen auf der Diagonale, also ist Σ und damit positiv definit.

Außerdem: Falls A invertierbar, so ist $U = AP^{-1}$ durch A und P bestimmt.

Eindeutigkeit von P.

Ist $A = UP$, dann ist $\underbrace{A^*A}_{\substack{\text{hermitesch} \\ \text{pos.-semidef.}}} = P^*U^*UP = P^2$

Die Eindeutigkeit von P folgt dann aus Lemma:

Lemma Sei $Q \in M_n(\mathbb{K})$ positiv semidef. hermitesch. Dann existiert eine eine eind. bestimmte positiv semidef. hermitesche Matrix $P \in M_n(\mathbb{K})$ mit $Q = P^2$.

Beweis. Es existiert eine orth./unitäre Matrix S s.d. $D := S^*QS$

Eindeutigkeit

eine Diagonalmatrix $\in M_n(\mathbb{R})$. Weil Q und damit D pos. semidef. sind, sind alle Diagonaleinträge $\in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Sei D' die Diagonalmatrix $\in M_n(\mathbb{R})$ mit nicht-neg. Einträgen und $(D')^2 = D$.

Wir setzen $P := S D' S^*$. Dann gilt: P pos. semidef. + hermitesch und $P^2 = S(D')^2 S^* = Q$.

Zur Eindeutigkeit der Quadratwurzel.

Sei $Q = P^2$ wie im Lemma. Sei S orth / unitär, o.d. $S^{-1} P S$ Diagonalmatrix ist (also auch $S^{-1} Q S$ Diagonalmatrix)

Wenn wir S als Basiswechselmatrix zwischen der Standardbasis

Eindeutigkeit

und einer ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ betrachten,

dann werden also die ER von P erzeugt von gewissen

Vektoren der Basis $\mathcal{B}$.

Weil $\lambda = \mu \iff \lambda^2 = \mu^2$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

gilt $V_{\lambda^2}(Q) = V_\lambda(P) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Weil P diagonalisierbar ist, ist P eindeutig durch Q bestimmt.

Quiz

Zeigen Sie, dass unendlich viele Matrizen $A \in M_2(\mathbb{K})$ mit $A^2 = E_2$ existieren.

Quiz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

Zeigen Sie, dass unendlich viele Matrizen $A \in M_2(\mathbb{K})$ mit $A^2 = E_2$ existieren.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2}_{\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \left(a^2+bc = 1 \text{ und } a = -d \right)$$

$$\text{oder } A = E_2 \text{ oder } A = -E_2$$

$A = E_2$ ist die eind. best. pos. semidef. "Quadratwurzel"

"Konkretes" Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = E_2$

für alle $b \in \mathbb{K}$.

Quiz

Polarzerl.: $A = UP$ U unitär, P pos semidef.

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass sich A als Produkt $A = PU$ für eine positiv semidefinite hermitesche Matrix P und eine orthogonale bzw. unitäre Matrix U schreiben lässt.

Quiz

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass sich A als Produkt $A = PU$ für eine positiv semidefinite hermitesche Matrix P und eine orthogonale bzw. unitäre Matrix U schreiben lässt.

1. Möglichkeit:

Sei $A^* = U'P'$ die Polarzerlegung von A^* (U' orth./unitär, P' pos semidef).

Dann gilt $A = (U'P')^* = P' \underbrace{(U')^*}_{\substack{\text{orth}/\text{unitär} \\ (= (U')^{-1})}}$

2. Möglichkeit:

Sei $A = U'P'$ die Polarzerlegung von A.

Dann gilt

$A = \underbrace{U'P'(U')^{-1}}_{\substack{\text{hermitesch} \\ \text{und positiv semidefinit.}}} U'$