

Übersicht

Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases} \quad V \text{ endlich dim. } \mathbb{K}\text{-VR}, \quad (\cdot, \cdot) \text{ Skalarprodukt auf } V$$

Spektralsatz für normale Endomorphismen

$$f: V \rightarrow V \text{ normal: } f \circ f^* = f^* \circ f$$

Dann f normal + trigonalisierbar $\Rightarrow$ es ex. ONB aus EV von f

Isometrien

$$f: V \rightarrow V \text{ Isometrie } (\Leftrightarrow) \forall v \in V: \|f(v)\| = \|v\| \Leftrightarrow f \text{ Isomorphismus und } f^{-1} = f^*.$$

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

V endlichdim'l K -VR mit SP $(\cdot, \cdot)$

$f: V \rightarrow V$, selbstadjungiert, $f^* = f$

Theorem Wenn f selbstadjungiert ist, dann ex. ONB aus EV von f
und alle EW von f liegen in $\mathbb{R}$.

Kor. $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, d.h. $A^t = A$, dann ist A diagonalisierbar.

Normalform für unitäre und orthogonale Abbildungen $\mathbb{K}, V, (-, -)$

$f: V \rightarrow V$ Isometrie $\Rightarrow$ es ex. ONB $\mathcal{B}$ von V :

$\mathbb{K}$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$|\lambda_i| = 1$$

$\mathbb{R}$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & \boxed{\rho_{\theta_1}} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{\rho_{\theta_t}} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 < \theta < \pi$$

Der Trägheitssatz von Sylvester

K, V

β hermitesche SLF auf V

$\leadsto \exists$ Basis e von V :

$$M_e(\beta) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen

Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

Theorem Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -VR mit Skalarprodukt und sei $f: V \rightarrow V$ selbstadjungiert, d.h. $f^* = f$.

Dann existiert eine ONB von V , die aus Eigenvektoren besteht und alle Eigenwerte von f liegen in $\mathbb{R}$.

Beweis. 1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nach dem Spektralsatz für normal Endom. ex. eine ONB B von V , die aus Eigenvektoren von f besteht. Weil f selbstadjungiert ist, ist $M_B^B(f)$ hermitisch, d.h. $M_B^B(f)^* = M_B^B(f)$. Das bedeutet gerade, dass alle Diagonaleinträge von $M_B^B(f)$ in $\mathbb{R}$ liegen,

und diese sind genau die EW von f .

2. Fall $K = \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{C}$ eine ONB von V und sei $A := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$

Weil f selbstadjungiert ist, ist A symmetrisch. ($n = \dim V$).

Dann ist A als Element von $M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix,
wir können also den 1. Fall auf A (bzw. auf $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) anwenden.
 $v \mapsto Av$

Damit folgt: das charakteristische Polynom von A (in $\mathbb{R}[X]$)
erfüllt in $\mathbb{R}[X]$ vollst. n. Linearfaktoren.

Also ist f diagonalisierbar, und nach dem Spektralsatz für normale Enden
es. eine ONB von V aus EV von f .

Korollar: Hermiteische Matrizen

Korr Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine hermitisch, d.h. $A^* = A$. Dann existiert eine Matrix $S \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $S^{-1} = S^*$ (d.h. S orthogonal $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
unitär $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
so dass $S^{-1} A S = S^* A S$ eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen.

Beweis. Wir betrachten den Endomorphismus $K^n \xrightarrow{f} K^n, v \mapsto Av$.
Dann ist f (bzgl. des Standard-SP) selbstadjungiert. Aus dem
Spektralsatz für selbstadj. Endom. folgt: Es ex. eine ONB $\mathcal{B}$ von K^n ,
s.d. $\Pi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix in $M_n(\mathbb{R})$ ist.
Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von K^n . Wir definieren $S = \Pi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$.
Dann gilt $\Pi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \Pi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \underbrace{\Pi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)}_{=A} \Pi_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$. Weil $\mathcal{E}, \mathcal{B}$ ONB'en,
gilt $S^{-1} = S^*$.

Die Hauptachsentransformation

Korr. Sei V ein endlichdim. $\mathbb{K}$ -VR mit SP $(\cdot, \cdot)$.

Sei β ein hermitescher SLF $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Dann existiert ein ONB $\mathcal{B}$ von V bzgl. $(\cdot, \cdot)$, so dass

$M_{\mathcal{B}}(\beta)$ eine Diagonalmatrix mit reellen Einträge ist.

(Insbes. ist dann $\mathcal{B}$ ein "Orthonormalbasis" bzgl. β , d.h. $(\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n))$,

$$\beta(b_i, b_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Beweis Sei $\mathcal{C}$ eine ONB von V , $A := M_{\mathcal{C}}(\beta)$, eine hermitesche Matrix. Dann ex $S \in GL_n(\mathbb{K})$
mit $S^{-1} = S^*$, so d. $S^* A S$ Diagonalmatr. mit reellen Einträge.

Wir interpretieren S als Basistransformation: Es ex. eine eindeutige Basis B von V mit $S = M_e^B$.

Dann gilt:

- $S^* A S = M_B(\beta)$

- B ONB (denn $S^{-1} = S^*$)

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt, $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie: f normal und trigonalisierbar $\Leftrightarrow f$ selbstadjungiert.

Wie ist es, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist?

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt, $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie: f normal und trigonalisierbar $\Leftrightarrow f$ selbstadjungiert.

$\Rightarrow$. Spektralsatz für normale Endom $\leadsto$ es ex. ONB $\mathcal{B}$ s.d. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ Diagonalmatrix, insbes. symmetrisch, also f selbstadjungiert

$\Leftarrow$. f normal: klar, f trigonalisierbar: nach dem Spektralsatz ist f sogar diagonalisierbar.

Wie ist es, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist?

" f selbstadjungiert $\Rightarrow f$ normal (+ trigonalisierbar)" gilt auch über $\mathbb{C}$

Genauso gilt: f selbstadjungiert $\Leftrightarrow f$ normal und alle EW von f liegen in $\mathbb{R}$

(Also ist zum Beispiel $f = i \cdot \text{id}_V$ normal und trigonalisierbar, aber nicht selbstadj.: $f^* = -i \cdot \text{id}_V$.)

Normalformen für orthogonale und unitäre Abbildungen

Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung: Isometrien

V ein endlichdim. $\mathbb{K}$ -VR mit SP $(\cdot, \cdot)$

$f: V \rightarrow V$ Isometrie $\Leftrightarrow \forall v, w: (f(v), f(w)) = (v, w)$

$\Leftrightarrow \forall v: \|f(v)\| = \|v\|$ "abstundstreuend"

$\Leftrightarrow f$ Isom. und $f^* = f^{-1}$

$\Leftrightarrow M_B^B(f)$ unitär und

$$M_B^B(f)^* = M_B^B(f)^{-1}$$

für B ONB von V

Bsp $V = \mathbb{R}^2$ mit Std-SP, $O(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}); A^{-1} = A^t\}$

$A \in O(2)$. 1. Fall $\det(A) = 1 \leadsto A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \vartheta \in [0, 2\pi)$

2. Fall $\det(A) = -1 \leadsto A$ homogen zu $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ in $O(2)$

Unitäre Abbildungen

Satz Sei V ein unitärer VR und sei $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist unitär, d.h. eine Isometrie

(ii) Es ex. eine ONB von V aus Eigenvektoren von f , und für alle EW λ von f gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Als Isometrie ist f normal. Nach dem Spektralsatz für normale Endom. ex. eine ONB B von V aus EV von f .

Dann gilt $M_B^B(f)^{-1} = M_B^B(f)^*$, d.h. für alle Diagonaleinträge λ von $M_B^B(f)$ (d.h. für alle EW λ von f) gilt: $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$, also $|\lambda| = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Einfach.

Geht: Euklidischer VR

Lemma Sei V ein euklidischer VR und $f: V \rightarrow V$ orthogonal.
Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein EW von f , dann gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

Beweis Sei $\|\cdot\|$ die zur gegebenen SP auf V gehörende Norm.
Ist $v \in V$ ein EV zum EW $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt:
$$(0+) \quad \|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \quad \text{also } |\lambda| = 1.$$

Normalform für orthogonale Abbildungen

Theorem. Sei V ein euklidischer VR mit SP $(\cdot, \cdot)$. Sei $f: V \rightarrow V$ eine Isometrie.

Dann ex. eine ONB B von V , so dass $M_B^B(f)$ eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der folgenden Form

- (Größe 1) $(1) \in M_1(\mathbb{R})$

- (Größe 1) $(-1) \in M_1(\mathbb{R})$

- (Größe 2) $\rho_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \in O(2)$

mit $\vartheta \in (0, \pi)$

($\hookrightarrow \sin \vartheta \in (0, 1)$)

A hand-drawn diagram of a block diagonal matrix enclosed in large parentheses. The matrix consists of several blocks along the main diagonal. The first block is a 1x1 box containing '1'. This is followed by a dotted line with a '1' above it, indicating a sequence of 1x1 blocks. Then, there is a 1x1 box containing '-1', followed by another dotted line with a '-1' above it, indicating a sequence of 1x1 blocks. Next is a 2x2 box labeled ρ_ϑ , followed by another dotted line with a '-1' above it, indicating a sequence of 2x2 blocks. The final block is a 2x2 box labeled ρ_ϑ . Below the first two dotted lines, there are two horizontal brackets, each spanning the width of one dotted line segment.

Dabei gilt: Die Anzahl der Blöcke "1" sowie die Anzahl der Blöcke "-1" sind unabhängig von der Wahl von B . Die Anzahl der Blöcke von Größe 2 und die Drehwinkel $\vartheta_1, \dots, \vartheta_t$ sind (bis auf die Reihenfolge) unabhängig von der Wahl von B .

Beweis Eindeutigkeit. Das char. Pol. einer Matrix in der Form

$$\det \left(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_s, \varrho_{\vartheta_1}, \dots, \varrho_{\vartheta_t} \right)$$

$$\text{ist } (X-1)^r (X+1)^s \cdot (X^2 - 2 \cos(\vartheta_1) X + 1) \cdots (X^2 - 2 \cos(\vartheta_t) X + 1)$$

↑
 und weil $\vartheta_i \in (0, \pi)$
 und bestimmen ϑ_i .

Exercise ($V \neq 0$)

Behauptung In der Situation des Theorems existiert ein f -invariantes
UVR $0 \neq U \subseteq V$ mit $\dim U \leq 2$

Begründung Sei $g := f + f^*$. Dann gilt $g^* = f^* + f^{**} = g$, d.h.
 g ist selbstadjungiert. Nach dem Spektralsatz für selbstadj. ABL ist
 g diagonalisierbar. Sei $v \in V$ ein EV von g mit EW $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sei $U := \langle v, f(v) \rangle$.

bzgl. U ist f -invariant, d.h. $f^2(v) \in U$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } f^2(v) &= f(\underbrace{f(v) + f^*(v) - f^*(v)}) = f(g(v)) - f(f^*(v)) \\ &= \lambda \cdot f(v) - v \in U. \end{aligned}$$

$f^* = f^{-1}$

Führe nun Induktion nach $n = \dim V$.

• $n=1$ ✓

• $n=2$: wie oben diskutiert - "O(2)"

$$\left(A \in O(2) \right) \xrightarrow{\det=1} \rho_\sigma \xrightarrow{\sigma=0} A = E_2$$

$$\xrightarrow{\sigma=\pi} A = -E_2$$

$$\swarrow \det=-1$$

$$\text{konj. zu } \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{in } O(2)$$

$$\xrightarrow{\sigma \in (0, \pi)} \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{\sigma \in (\pi, 2\pi)} \quad \left(\rho_\sigma \text{ konjugiert zu } \rho_{2\pi-\sigma} \text{ in } O(2) \right)$$

• $n \geq 2$. Nach der Beh. ex. $U \subseteq V$, $0 < \dim U \leq 2$, f -invariant,

Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$, $U^\perp$ ist f -invariant

Wähle geeignete ONB von U , $U^\perp$. Durch Zusammensetzen erhält ONB von V wie gewünscht.

Quiz

Geben Sie, ähnlich wie wir es für $O(2)$ gemacht haben,
eine Beschreibung der Elemente der orthogonalen Gruppe $O(3)$.

Quiz

Geben Sie, ähnlich wie wir es für $O(2)$ gemacht haben,
eine Beschreibung der Elemente der orthogonalen Gruppe $O(3)$.

Sei $A \in O(3)$, d.h. $A \in GL_3(\mathbb{R})$, $A^{-1} = A^t$. Zwei Fälle: 1. Fall $\det A = 1$ "Drehung"
2. Fall $\det A = -1$

1. Fall $\det(A) = 1$. Dann ex. $S \in O(3)$ n.d.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \overline{} & \\ & & \rho_\vartheta \end{pmatrix} \text{ mit}$$

• $\vartheta = 0$, $\rho_\vartheta = E_2$, $A = E_3$, oder

• $\vartheta \in (0, \pi]$

$0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ mit $Av = v$, $U = \langle v \rangle^\perp$

$\leadsto \langle v \rangle$ "Drehachse",

$f_{A|U}$ Drehung um ϑ

2. Fall $\det A = -1$. Dann ea $S \in O(3)$ s.d.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \hline & \rho_\phi \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\bullet \quad \phi = 0, \quad S^{-1}AS = \text{diag}(-1, 1, 1)$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{b_1} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{b_2, b_3}$

"Spiegelung an $U = \langle b_2, b_3 \rangle$ ", oder

$$\bullet \quad \phi = \pi, \quad A = -E_3$$

"Punktspiegelung im Ursprung", oder

$$\bullet \quad \phi \in (0, \pi).$$

$$\exists v \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } Av = -v, \quad U = \langle v \rangle^\perp$$

$\leadsto f_A|_U$ Drehung um ϕ

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \hline & \rho_\phi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & E_2 & \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \hline & \rho_\phi \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}} \quad \text{"Dreh-
spiegelung"}$$

Der Trägheitssatz von Sylvester

Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und sei β eine hermitesche Sesquilinearform auf V .

Zeigen Sie:

β positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte von $M_{\mathcal{B}}(\beta)$ (in $\mathbb{R}$) sind positiv.

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und sei β eine hermitesche Sesquilinearform auf V .

A ← hermitesche Matrix

Zeigen Sie:

β positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte von $\overbrace{M_{\mathcal{B}}(\beta)}^{\text{ii}}$ (in $\mathbb{R}$) sind positiv.

$\Rightarrow$ $v \in \mathbb{K}^n$ EV von A zum EW λ , dann

$$\tilde{v} = c_{\mathcal{B}}^{-1}(v) \in V$$

orthogonal/unitär

$$\underbrace{\beta(\tilde{v}, \tilde{v})}_{>0} = v^* A v = \lambda \cdot \underbrace{v^* v}_{>0}$$

$\Leftarrow$ Spektralsatz: $\exists S \in GL_n(\mathbb{K}), S^{-1} = S^* : \underbrace{S^{-1} A S}_{\text{selbe EW wie } A} = \underbrace{S^* A S}_{\text{Stuhlmatrix von } \beta \text{ (bzgl. Basis von } V), \text{ also Diagonaleintr. positiv, da } \beta \text{ pos. definit.}}$ Diagonalmatrix

Der Trägheitssatz von Sylvester

$$K = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}, \quad V \text{ endlichdim. } K\text{-VR} \\ n = \dim V$$

Sei ρ eine hermitesche SLF auf V .

Sei B eine Basis von V und seien k_+ , k_- , k_0 die Anzahlen der positiven bzw. negativen EW bzw. der EW = 0 von $A := M_B(\rho)$, jeweils gezählt mit der Vielfachheit als Nullstelle von Charpol_A . Dann gilt:

(1) Es ex. eine Basis C von V , s.d. $M_C(\rho) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k_+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{k_-}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_0})$

(2) Es gilt $k_+ + k_- + k_0 = n$ und die Zahlen k_+ , k_- , k_0 sind unabhängig von der Wahl von B , und genauer gilt:

• $k_+ = \max \{ \dim U; U \subseteq V \text{ UVR s.d. } \rho|_{U \times U} \text{ pos. def.} \} = m_+$

- $k_- = \max \{ \dim U; U \subseteq V \text{ UR s.t. } \beta|_{U \times U} \text{ negativ def.} \} = m_-$
- $k_0 = \dim V_0$, wobei $V_0 = \{ u \in V; \forall v \in V: \beta(v, u) = 0 \}$
"Nullraum von β "

Das Tripel $(k_+, k_-, k_0) (\in \mathbb{N}^3)$ nennen wir den Signertyp oder die
Signature von β . [manchmal: Signature $k_+ - k_-$]

Beweis. Nach dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen, angewandt auf A ,
ist $\text{charpol}_A \in \mathbb{R}[X]$ und charpol_A zerfällt in $\mathbb{R}[X]$ vollst. in LF.
Das bedeutet, dass $k_+ + k_- + k_0 = n$ ist.

Anfordern ex. eine orthogonale bzw. unitäre Matrix S ($S^{-1} = S^*$)

mit $\underbrace{S^{-1}AS}_{\text{selbe EW wie bei } A} = \underbrace{S^*AS}_{\parallel M_{e'}(\beta)} \quad \text{Diagonalisation.}$

selbe EW
wie bei A

$\parallel M_{e'}(\beta)$

$$S = M_{\mathcal{B}}^{e'}$$

$$e' = (c'_1, \dots, c'_n)$$

$$\text{Sei } c_i := \frac{1}{\sqrt{|\beta(c'_i, c'_i)|}} c'_i \quad \leadsto \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$$

Basis von V , o.d. - gegebenes β nach

Ändern der Reihenfolge -

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\ell_+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\ell_-}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\ell_0} \right)$$

zu (2). Es gilt $\ell_0 = \dim \text{Ker}(A)$ und der Koordinatensomorphismus
 $\uparrow$
A diagonalisierbar

liefert

$$\text{Ker}(A) \xrightarrow{c_0^{-1}} \{w \in V; \forall v \in V: \beta(v, w) = 0\} = V_0.$$

Sehen auch: es gibt eine UVR $U \subseteq V$ mit $\dim U = k_+$, o.d.

$\beta|_{U \times U}$ pos.-definit ist (nämlich $U = \langle c_1, \dots, c_{k_+} \rangle$),

d.h. $k_+ \leq m_+$, analog $k_- \leq m_-$.

→ genügt nun, die folg. Behauptung zu zeigen:

Beh. Seien $U_+, U_- \subseteq V$ UVR o.d. $\beta|_{U_+ \times U_+}$ pos.-def., $\beta|_{U_- \times U_-}$ neg.-def.

Dann gilt: $U_+ + U_- + V_0$ ist direkte Summe ($\Rightarrow \dim U_+ + \dim U_- + \dim V_0 \leq n$)

Begründung

1. Schritt

$$U_- \cap V_0 = 0$$

$$- \begin{matrix} \beta|_{U_- \times U_-} \text{ neg.-def.}, \\ \beta|_{V_0 \times V_0} = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Rightarrow \\ (U_- \cap V_0) \setminus \{0\} = \emptyset \end{matrix} \right.$$

2. Schritt

$$U_+ \cap (U_- + V_0) = 0$$

$$\bullet \beta|_{U_+ \times U_+} \text{ pos.-definit}$$

$$\bullet \beta|_{(U_- + V_0) \times (U_- + V_0)} \text{ negativ semi-definit}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \Rightarrow (U_+ \cap (U_- + V_0)) \setminus \{0\} = \emptyset. \end{matrix} \right.$$

Quiz

Charakterisieren Sie die folgenden Eigenschaften einer hermiteschen Sesquilinearform durch ihre Signatur (k_+, k_-, k_0) :

nicht-ausgeartet

positiv definit

positiv semidefinit

negativ definit

negativ semidefinit

indefinit

Quiz

Charakterisieren Sie die folgenden Eigenschaften einer hermiteschen Sesquilinearform durch ihre Signatur (k_+, k_-, k_0) :

nicht-ausgeartet $k_0 = 0$

positiv definit $k_- = k_0 = 0$

positiv semidefinit $k_- = 0$

negativ definit $k_+ = k_0 = 0$

negativ semidefinit $k_+ = 0$

indefinit $k_+ > 0$ und $k_- > 0$

Quiz

$$\beta: \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$$

Bestimmen Sie den Signaturtyp von β , $\beta(v, w) = v^*Aw$ mit

$$M_{\mathcal{E}}(\beta) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quiz

Bestimmen Sie den Signaturtyp von β , $\beta(v, w) = v^*Aw$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Möglichkeit. EW von A bestimmen, aus den Vorzeichen der EW ergibt sich der Signaturtyp

2. Möglichkeit

- $\det(A) = -6$, also
 - β nicht-ungeeert, also $k_0 = 0$
 - k_- ungerade, weil $\det(A)$ denselben Vorzeichen hat wie $(-1)^{k_-}$

- β ist nicht negativ definit, denn es gibt Diagonaleinträge von A , die ≥ 0 sind, also $k_- \neq 3$

Daher bleibt als einzige Möglichkeit für den Signatortyp von β :

$$(k_+, k_-, k_0) = (2, 1, 0).$$