

Übersicht

Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{BLF} \\ \mathbb{C} & \sigma = \text{kompl. Kong.}, \quad \text{SLF } \beta, \end{cases} \quad V \text{ ein } \mathbb{K}\text{-VR}$$

Skalarprodukte — hermitesch $(\beta(w, v) = \overline{\beta(v, w)})$
+ positiv definit: $\beta(v, v) \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$

Ungleichung von Cauchy-Schwarz (insbes. β nicht-avg.)

$$\hookrightarrow |\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle, \text{ m.a.W. } |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Der Satz von Gram-Schmidt

Ziele in diesem Abschnitt der Vorlesung

Geometrische Ergebnisse

"Standard"-Geometrie in $\mathbb{R}^n$ $\leadsto$ Standard-Innenprodukt

Hier: abstrahieren ("Innenprodukt") und strukturell untersuchen.

- SP definiert "Geometrie" auf ungel. VR die von der Standardgeom. abweichen kann
- "Zusammenhang" SP und VR-Endomorphismen
- Strukt. 'spezieller' Endomorphismen. (z.B.: $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch $\Rightarrow A$ diagonalisierbar)
/ Matrizen
- Strukt. allgemeiner Endomorphismen / Matrizen (Polarteilung, Singulärwertzerlegung)

Das Minorenkriterium für Definitheit

K

V mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

$A \in M_n(K)$ mit $A = A^*$, β die end. best. hermitesche BLF
" $(a_{ij})_{i,j}$ mit $M_{\mathcal{B}}(\beta) = A$

Dann β pos.-definit $\Leftrightarrow \det((a_{ij})_{i,j=1,\dots,r}) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall r=1,\dots,n$

$$\left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \hline \boxed{} \end{array} \right)_r$$

Die adjungierte Abbildung eines Endomorphismus

$$f: V \rightarrow V \quad \leadsto \quad \text{es ex. endl. best. Endom. } f^*: V \rightarrow V \text{ mit}$$
$$(f(v), w) = (v, f^*(w)) \quad \forall v, w \in V$$

Der Spektralsatz für normale Endomorphismen

$f: V \rightarrow V$ normal :

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

↗ nur richtig, falls
 $f = f^*$
(f "selbstadjungiert")

Theorem f normal + trigonalisierbar

Dann existiert ein ONB aus Eigenvektoren von f besteht.

Isometrien, Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$$f: V \rightarrow V \quad \text{Isometrie} \quad (\Rightarrow) \quad \forall v \in V: \quad \|v\| = \|f(v)\|$$

"abstandserhaltend"

Das Minorenkriterium für Definitheit

Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung

V ein $\mathbb{K}$ -VR mit hermiteschem SLF $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$

Sei B eine Basis von V .

Falls β pos. definit ist, so gilt $\det(\underbrace{M_B(\beta)}) \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\begin{array}{c} \parallel \\ S^* \underbrace{M_B(\beta)} S \\ \parallel \leftarrow e \text{ ONB} \\ E_n \end{array}$$

Quiz

Für welche $a, b, d \in \mathbb{R}$ definiert die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ eine *positiv definite* symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$?

Quiz

$$\beta(e_1, e_1) = a, \quad \beta(e_2, e_2) = d \\ [\beta(e_1, e_2) = b]$$

Für welche $a, b, d \in \mathbb{R}$ definiert die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$?

- Jedenfalls muss $a > 0, \quad d > 0, \quad ad - b^2 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} > 0$ gelten.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= ax^2 + 2bxy + dy^2 \\ &= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{a} xy + \left(\frac{b}{a} y \right)^2 \right] + \left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2} \right) y^2 \\ &\quad \swarrow a \neq 0 \\ &= a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \frac{1}{a^2} (ad - b^2) y^2 \geq 0 \text{ und } > 0 \text{ für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Also: Die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ definiert eine pos. def. BLF $\Leftrightarrow a > 0, \det A > 0$.

Das Minorenkriterium für Definitheit

Satz Sei V ein endlichdim. K -VR mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und sei β eine hermitesche SLF auf V . Dann sind äquivalent:

(i) β ist positiv definit

(ii) für alle $r = 1, \dots, n$ gilt $\det \left((\beta(b_i, b_j))_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, r}} \right) \in \mathbb{R}_{>0}$

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist β pos.-definit, dann ist auch die Einschränkung von β auf $U \times U$ für jeden UVR $U \subseteq V$ pos. def., wobei hat die Skalarprodukte bzgl. $(b_1, \dots, b_r)$

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{---} & \\ \text{---} & \\ \text{---} & \\ \text{---} & \end{array} \right) = M_{\mathcal{B}}(\beta)$$

(für $U = \langle b_1, \dots, b_r \rangle$) Determinante $\in \mathbb{R}_{>0}$. Das ist genau Bed. (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Induktion nach $n = \dim V$. Der Fall $n=1$ ist klar

$n > 1$. Per Induktionsvoraussetzung sehen wir: mit $U = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ gilt:
 $U \times U \rightarrow \mathbb{K}, (v, u) \mapsto \beta(v, u)$, pos. definit.

Sei $v_1, \dots, v_{n-1} \in U$ eine ONB für dieses Skalarprodukt $\beta|_{U \times U}$.

$$\text{Sei } v_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \beta(v_i, b_n) v_i \quad (\neq 0)$$

$$\text{Dann gilt } \beta(v_j, v_n) = \beta(v_j, b_n) - \beta(v_j, b_n) = 0 \quad (j=1, \dots, n-1)$$

Also mit $\mathcal{C} := (v_1, \dots, v_n)$: $M_{\mathcal{C}}(\beta) = \text{diag}(1, \dots, 1, \beta(v_n, v_n))$

Dann gilt $M_{\mathcal{C}}(\beta) = S^* M_{\mathcal{B}}(\beta) S$, also $\underbrace{\det M_{\mathcal{C}}(\beta)}_{\substack{\parallel \\ \beta(v_n, v_n)}} = |\det(S)|^2 \underbrace{\det M_{\mathcal{B}}(\beta)}_{\substack{\vee \\ 0 \text{ wr.}}}$

$\leadsto \beta\left(\sum a_i v_i, \sum a_i v_i\right) = \underbrace{a_1 \bar{a}_1}_{\substack{\parallel \\ |a_1|^2}} + \dots + a_{n-1} \bar{a}_{n-1} + \underbrace{\beta(v_n, v_n)}_{>0} a_n \bar{a}_n,$

dt. β ist positiv definit, wie gewünscht.

Negativ definite Formen

$\mathbb{K}, V$

β negativ definit $\Leftrightarrow -\beta$ positiv definit

Vorzeichen
konjugiert (28.6.)



$\leadsto$ Kriterium für negative Definitheit:

$$\beta \text{ negativ def.} \Leftrightarrow (-1)^r \det \left(\beta(b_i, b_j) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, r}} > 0 \quad \text{für alle } r=1, \dots, n.$$

Quiz

Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Quiz

Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

pos. definit, denn

- $3 > 0$

- $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 5 > 0$

- $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$

nicht pos.-def.,

denn $\beta(e_3, e_3) < 0$

nicht pos.-def.,

denn $\beta|_{\langle e_2, e_3 \rangle \times \langle e_2, e_3 \rangle}$

nicht pos.-definit.

Normale Endomorphismen

Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Erinnerung: Die adjungierte Abbildung

K , V endlichdim. K -VR
mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$

$f: V \rightarrow V$ Endom. $\rightarrow$ es ex. end. bestimmte
Endomorphismen $f^*: V \rightarrow V$ (der zu f adjungierte
Endomorphismus)

$$\text{d.h. } (f(v), w) = (v, f^*(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

$$\text{Es gilt } (f^*)^* = f, \text{ m.w.} \quad (v, f(w)) = (f^*(v), w)$$

$$\text{Ist } B \text{ eine Basis von } V, \text{ so gilt } M_B^B(f^*) = M_B(\beta)^{-1} M_B^B(f)^* M_B(\beta).$$

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Sei f ein Endomorphismus von V .

Zeigen Sie: Ist U ein f -invarianter Untervektorraum, dann ist $U^\perp$ ein f^* -invarianter Unterraum.

Quiz

$$U^\perp = \{ v \in V; \forall u \in U: u \perp v \}$$

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Sei f ein Endomorphismus von V .

Zeigen Sie: Ist U ein f -invarianter Untervektorraum, dann ist $U^\perp$ ein f^* -invarianter Unterraum.

Gegeben: $U \subseteq V$ UVR, $f(U) \subseteq U$. z.z.: $v \in U^\perp \Rightarrow f^*(v) \in U^\perp$.

Für $\begin{matrix} u \in U \\ v \in U^\perp \end{matrix}$ gilt $(u, f^*(v)) = (\underbrace{f(u)}_{\in U}, \underbrace{v}_{\in U^\perp}) = 0$, d.h. $f^*(v) \in U^\perp$.

Normale Matrizen

$\mathbb{K}$, V VR über $\mathbb{K}$, $(\cdot, \cdot) = \beta$ SP

Satz Seien $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und B eine ONB von V .

Dann gilt $M_B^B(f^*) = M_B^B(f)^*$.

Def. $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt selbstadjungiert, wenn $f^* = f$ gilt,

äquivalent: für jede ONB B gilt $M_B^B(f) = M_B^B(f)^*$

Def (1) $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt normal, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$.

(2) $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt normal, wenn $AA^* = A^*A$.

Selbstadjungierte und normale Endomorphismen

$\mathbb{K}$, V , $(\cdot, \cdot)$ SP

Satz Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Dann sind äquivalent

(i) Der Endomorphismus f ist normal.

(ii) Für alle $v, w \in V$ gilt: $(f(v), f(w)) = (f^*(v), f^*(w))$

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii).

$$(f(v), f(w)) = (v, \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ normal}}}{f^*(f(w))}) = (v, f(f^*(w))) = (f^*(v), f^*(w)).$$

auch äquivalent.

(ii) für alle $v \in V$

gilt $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es gilt dann $(v, f^*(f(w))) = (v, f(f^*(w)))$,

also $(v, f^*(f(w)) - f(f^*(w))) = 0$ for all $v \in V$

$\Rightarrow$
(.) nicht-ang. $f^*(f(w)) = f(f^*(w))$, Das gilt für alle $w \in V$.

Korollar Sei $f: V \rightarrow V$ normal.

(1) Es gilt $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^*)$.

(2) Sei $v \in V$. Dann gilt v EV zum EW $\lambda \in \mathbb{K}$ für f

$$\Leftrightarrow v \text{ EV zum EW } \bar{\lambda} \in \mathbb{K} \text{ für } f^*$$

Beweis zu (1) Ist $v \in \text{Ker}(f)$, so gilt $(f^*(v), f^*(v)) = (f(v), f(v)) = 0$,
also $f^*(v) = 0$. Das bedeutet " $\subseteq$ ". " $\supseteq$ " analog

zu (2) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $(f - \lambda \cdot \text{id}_V)^* = f^* - \bar{\lambda} \cdot \text{id}_V$.

Also: f normal $\Rightarrow f - \lambda \text{id}_V$ normal

$$\Rightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_K) = \text{Ker}(f^* - \bar{\lambda} \text{id}_K)$$

(1)

Der Spektralsatz für normale Endomorphismen $\mathbb{K}, V, (\cdot, \cdot)$ SP

Theorem Sei $f: V \rightarrow V$ normal und trigonalisierbar.

Dann gilt: Es existiert eine ONB von V , die aus Eigenvektoren von f besteht.

(Andersherum: wenn für $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eine ONB von V aus EV von f existiert, dann ist f normal.)

Beweis Sei oB $V \neq 0$. Es ex. dann ein EW λ von f . Sei $v \in V$ ein EV von f zu diesem Eigenwert mit $\|v\| = 1$.

Sei $U = \langle v \rangle^\perp$. Dann $\dim U = \dim V - 1$. Können per Induktion

annahme, dass das Ergebnis für U richtig.

Behauptung $f(U) \subseteq U$

Begründung. Sei $u \in U$. Dann gilt

$$(f(u), v) = (u, f^*(v)) = (u, \bar{\lambda} v) = \bar{\lambda} \cdot (u, v) = 0,$$

also $f(u) \in U$.

Behauptung $f|_U \in \text{End}_K(U)$ ist normal

Begründung Weil $f(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$, gilt $f^*(U) \subseteq U$

$$(u \in U \leadsto (f^*(u), v) = (u, f(v)) = \lambda(u, v) = 0).$$

Es folgt, dass $(f^*)|_U = (f|_U)^*$.

Insbesondere folgt $f|_U \circ (f|_U)^* = (f|_U)^* \circ f|_U$,
d.h. $f|_U$ normal Endom. von U

Wissen auch: $f|_U$ wieder trigonalisierbar.

IV: Es ex. ONB $b_2, \dots, b_n$ von U aus EV von $f|_U$.

Dann ist $b_1 = v, b_2, \dots, b_n$ eine ONB von V aus EV von f .

Quiz

Bestimmen Sie alle nilpotenten normalen Matrizen in $M_n(\mathbb{K})$.

Quiz

Bestimmen Sie alle nilpotenten normalen Matrizen in $M_n(\mathbb{K})$.

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ normal und nilpotent.

Dann ist A trigonalisierbar (denn $\text{charpol}_A = X^n$).

Spektralsatz für normale Endomorphismen $\Rightarrow A$ diagonalisierbar.

Da 0 der einzige EW von A ist, folgt $A=0$.

Also: die Nullmatrix ist die einzige nilpotente normale Matrix.

Isometrien

Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Die Polarisationsformel

K , V endlichdim. K -VR mit SP $(\cdot, \cdot)$

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Lemma (1) Sei $K = \mathbb{R}$, d.h. V ein euklidischer VR. Dann gilt

$$(v, w) = \frac{1}{2} (\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$$

(2) Sei $K = \mathbb{C}$, d.h. V ein unitärer VR. Dann gilt

$$(v, w) = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) - \frac{i}{4} (\|v+iw\|^2 - \|v-iw\|^2).$$

Beweis Nachrechnen.

Isometrien

$\mathbb{K}$, V, W VR über $\mathbb{K}$, $(\cdot, \cdot)$ SP auf V
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ SP auf W

Satz Sei $f: V \rightarrow W$ ein VR-Homom. Dann sind äquivalent:

(i) für alle $v, v' \in V$ gilt $(v, v') = \langle f(v), f(v') \rangle$

(ii) für alle $v \in V$ gilt $\|v\| = \|f(v)\|$

(iii) für jede Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V
gilt: $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ ist ONB von $\text{Im}(f)$

(iv) Es existiert eine ONB $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V , so d.
 $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ eine ONB von $\text{Im}(f)$ bilden.



↑ Rel.
formel



Hat f diese Eigenschaften, dann ist f injektiv (Satz (ii)).

Ein Isomorphismus mit diesen Eigenschaften heißt Isometrie.

Ist speziell $V=W$, dann sind die obigen Eigenschaften äquivalent zu

(v) $[V=W]$ f ist ein Isomorphismus und $f^* = f^{-1}$.

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (iii) Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig.

$(B=(b_1, \dots, b_n))$
ONB

$\Rightarrow$ spez. $f(b_1), \dots, f(b_n)$ Orthogonalsystem
und $\|f(b_i)\| = 1$

Aber $\langle f(b_i), f(b_j) \rangle \underset{(i)}{=} (b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(iv) $\Rightarrow$ (v) Für $v = \sum a_i b_i$, $v' = \sum a'_i b_i$, dann

$$\langle f(v), f(v') \rangle = \sum_{i,j} \bar{a}_i a'_j \underbrace{\langle f(b_i), f(b_j) \rangle}_{\substack{= \langle b_i, b_j \rangle \\ (iv)}} = (v, v').$$

(i) $\Rightarrow$ (v) (falls $V=W$) f Isomorphismus, weil f injektiv + surjektiv + V endlichdimensional

Für alle $v, v' \in V$ gilt mit $v'' = f(v')$, d.h. $f^{-1}(v'') = v'$:

$$(v, f^{-1}(v'')) = (v, v') \underset{(i)}{=} (f(v), f(v')) = (f(v), v''),$$

also $f^* = f^{-1}$.

(v) $\Rightarrow$ (i). $(v, v') = (v, f^{-1}(v'')) = (f(v), v'') = (f(v), f(v')), v'' = f(v')$

Orthogonale und unitäre Abbildungen

Def (1) Sei V ein endl. VR. Ein Automorphismus f von V , der eine Isometrie ist, heißt orthogonale Abb.

(2) Sei V ein unitärer VR. Ein Automorphismus f von V , der eine Isometrie ist, heißt unitäre Abb.

Jede Verkleinerung von Isometrie ist eine Isometrie. Insbes.: die Verkleinerung von orth. / unit. Abb. ist eine orth. / unit. Abb. Die Umkehrabb. einer Isometrie ist eine Isometrie, insbes.: für orth. / unit. Abb.

Orthogonale und unitäre Abbildungen

Def (1) V endl. VR (mit SP β)

Untergruppe



$$\leadsto O(V) = O(V, \beta) = \{ f: V \rightarrow V \text{ orth. Abb.} \} \subseteq \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$$

heißt die orthogonale Gruppe von V

(2) V unit. VR (mit SP β)

Untergruppe



$$\leadsto U(V) = U(V, \beta) = \{ f: V \rightarrow V \text{ unit. Abb.} \} \subseteq \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$$

heißt die unitäre Gruppe von V .

Orthogonale und unitäre Matrizen

Def (1) Eine Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ heißt orthogonal, falls $A^{-1} = A^t$.

(2) Eine Matrix $A \in GL_n(\mathbb{C})$ heißt unitär, falls $A^{-1} = A^*$.

Lemma Sei V endlid / unit. VR, $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus

Sei B ein ONB von V . Dann sind äquivalent:

(1) f orthogonal / unitär

(2) $M_B^B(f)$ orthogonal / unitär.

Def. (1) Die Untergruppe $O(n) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}); A \text{ orthogonal} \} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ heißt die orthogonale Gruppe.

(2) Die Untergruppe $U(n) = \{ A \in GL_n(\mathbb{C}); A \text{ unitär} \} \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ heißt die unitäre Gruppe.

Quiz

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie: $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie: $|\det(A)| = 1$.

Quiz

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie: $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie: $|\det(A)| = 1$.

$$A A^* = E_n \quad \Rightarrow \quad |\det(A)|^2 = \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = \det(A) \cdot \det(A^*) = \det(A A^*) = 1.$$

Quiz / $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt

Sei $A \in O_2(\mathbb{R})$, d.h. $AA^t = E_2$.

$\det(A) = 1$ Dann $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$

Sei $\mathcal{I} = \mathcal{I}(e_1, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$,

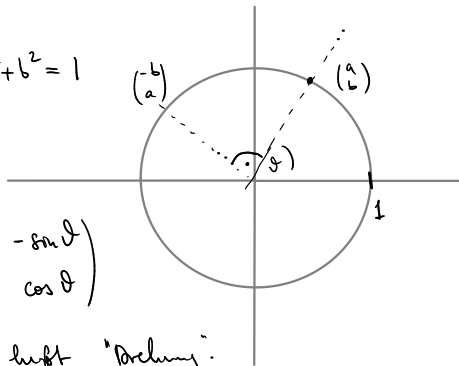
also $\cos \vartheta = a$, $A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$

A heißt Drehmatrix, die impl. Abb. heißt "Drehung".

Falls $b \neq 0$, so hat A keine Eigenvektoren.

(allg.: $SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) ; \det(A) = 1 \} \subseteq O_n(\mathbb{R})$

"spezielle orth. Gruppe"
Drehungen.



$$\underline{\det(A) = -1}$$

$\rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } a^2 + b^2 = 1$$

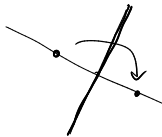
"Spiegelung"

In dem Fall hat A

Eigenwerte $1, -1$,

ER orthogonal zueinander

(direkte Rechnung / Spektralset)



Quiz

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V , und $\mathcal{C}$ eine Basis von V .

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $\mathcal{C}$ ist eine Orthonormalbasis,
- (ii) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ist orthogonal bzw. unitär,
- (iii) $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ ist orthogonal bzw. unitär.

Quiz

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V , und $\mathcal{C}$ eine Basis von V .

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $\mathcal{C}$ ist eine Orthonormalbasis,
 - (ii) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ist orthogonal bzw. unitär,
 - (iii) $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ ist orthogonal bzw. unitär.
- $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, weil $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.
- $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Wir schreiben
 $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$

und betrachten $f: V \rightarrow V$, $b_j \mapsto c_j$. Dann $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, also

$$\begin{array}{c} f \text{ Isometrie} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \text{ orthogonal/unitär} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \text{ orthogonal/unitär.} \\ \updownarrow \\ \mathcal{C} \text{ ONB} \end{array}$$