Übersicht
Vorlesungswoche 11

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung

K K_p, V VR über K

Bilinearformen $V \times V \longrightarrow K$

Sesquilinearformen $\sigma : K \to K$ Automorph.,

$\sigma \circ \sigma = id_K$

$\left[\begin{array}{l} \cdot\ K,\ \sigma = id_K \\ \cdot\ \mathbb{C},\ \sigma = \text{komplex Konj} \end{array} \right]$

$V \times V \xrightarrow{\beta} K$

semilinear

linear in 2. Eintrag

Symmetrisch, hermitesch

$\beta(v,w) = \beta(w,v)$

$\beta(v,w) = \sigma(\beta(w,v))$

$\beta(av,w) = \sigma(a)\,\beta(v,w)$

Strukturmatrix

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, β $\longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(\beta) = \big(\beta(b_i, b_j)\big)_{i,j} \in M_n(K)$

Die adjungierte Abbildung

V, β nicht-ausz., hermitesch

$f: V \to V \rightsquigarrow$ es ex. eind. best. Endom $f^*: V \to V$:

$$\beta(f(v), w) = \beta(v, f^*(w))$$

Skalarprodukte

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} & (\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}) \\ \mathbb{C}, & \sigma = \text{kompl. Konj.} \end{cases}$$

V ein endl-dim'l $\mathbb{K}$-VR.

$\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ SLF heißt <u>Skalarprodukt</u>, falls

β hermitesch + "positiv definit": $\beta(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$.

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$\mathbb{K}$, V mit SP $(\cdot,\cdot)$

$v, w \in V$

$$|(v,w)|^2 \leq (v,v) \cdot (w,w)$$

Orthogonalbasen und Orthonormalbasen

V mit SP

$v_1, \dots, v_n$ ONB

- $v_i \perp v_j \quad \forall\, i \neq j$
- $(v_i, v_i) = 1$

Das Verfahren von Gram-Schmidt

Für jedes Skalarprodukt existiert eine "Orthonormalbasis".

+ explizites Algorithmus zur Berechnung einer ONB.

Der adjungierte Endomorphismus
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Sesquilinearformen und Endomorphismen

K Körper, σ Autom., $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_K$.

Sei V ein endl.-dim'l K-VR

β eine SLF auf V.

Ist $g : V \to V$ ein Endom. von f, so ist

$$\beta_g : V \times V \to K, \qquad (v, w) \mapsto \beta(v, g(w)), \qquad \text{eine SLF auf } V.$$

<u>Satz</u> Ist β nicht-ausgeartet, so ist die Abb.

$$\mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{SLF}(V), \qquad g \mapsto \beta_g, \qquad \text{ein Isom. von } K\text{-VR}.$$

<u>Beweis</u>. Linearität der Abb.: einfach.

Wissen: $\dim_K \mathrm{End}_K(V) = \dim(V)^2$, $\dim_K \mathrm{SLF}(V) = \dim(V)^2$.

$\rightsquigarrow$ goal: Abb. ist injektiv, m.a.W.: hat trivialen Kern.

Sei $g \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f_g = 0$, d.h. $f(v, g(u)) = 0 \quad \forall v, u \in V$.

Also gilt für jedes $u \in V$: $\underbrace{f(v, g(u)) = 0 \text{ für alle } v \in V}$

$\Longrightarrow g(u) = 0$

f nicht-ausg.

$\Rightarrow g = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$.

Die adjungierte Abbildung

Sei nun β eine nicht-ausg. hermitesche SLF

K, σ
V

<u>Satz</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann ex. ein eind. best. Endomorphismus $g : V \to V$, so dass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\beta(f(v), w) = \beta(v, g(w))$$

Wir nennen g die zu f <u>adjungierte Abbildung</u> und schreiben $f^* := g$.

<u>Beweis</u> Die Abb. $(v,w) \mapsto \beta(f(v), w)$ ist eine SLF, hat also die Form β_g für ein eind. bestimmtes $g \in \mathrm{End}_K(V)$.

Konkrete Beschreibung in Termen von Matrizen, Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

Dann gilt

$$\beta(f(v), w) = c_{\mathcal{B}}(f(v))^* M_{\mathcal{B}}(\beta)\, c_{\mathcal{B}}(w) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\, c_{\mathcal{B}}(v)\right)^* M_{\mathcal{B}}(\beta)\, c_{\mathcal{B}}(w)$$

$$c_{\mathcal{B}}(v)^* M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\beta)\, c_{\mathcal{B}}(w) = c_{\mathcal{B}}(v)^* \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\beta)}_{\substack{\text{invertierbar,} \\ \text{weil } \beta \text{ nicht-ausg.}}} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\beta)^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\beta)}_{= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)}\, c_{\mathcal{B}}(w)$$

Also $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(\beta)^{-1} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\beta)$$

Adjungierte Abbildung und duale Abbildung

$V, \quad \beta, \quad f$

Sei $\psi := \psi(\beta) : V \xrightarrow{\sim} V_\sigma^\vee$

$$w \mapsto \begin{pmatrix} V_\sigma \to K \\ v \mapsto \beta(v,w) \end{pmatrix}$$

β nicht-ausg. $\Rightarrow \psi$ Isom.

Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} f^\vee(\psi(w))(v) = \psi(w)(f(v)) &= \beta(f(v),w) \\ &\quad \| \\ \psi(f^*(w))(v) &= \beta(v, f^*(w)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^\vee(\psi(w)) = \psi(f^*(w)) \in V_\sigma^\vee,$$

also $f^\vee \circ \psi = \psi \circ f^*$

$(\in \mathrm{Hom}(V, V_\sigma^\vee))$

$\rightsquigarrow$ kommutativer Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi_\sim"] \arrow[d, "f^*"'] & V_\sigma^\vee \arrow[d, "f^\vee"] \\ V \arrow[r, "\psi_\sim"] & V_\sigma^\vee \end{tikzcd}$$

Also $\quad f^* = \varphi^{-1} \circ f^\vee \circ \varphi$

<u>Bem.</u>

$$\begin{array}{ccc} V_\sigma^\vee & = & \mathrm{Hom}(V_\sigma, K) \\ \downarrow f^\vee & & \lambda \\ V_\sigma^\vee & & \downarrow \\ & & \lambda \circ \underbrace{f}_{\in \mathrm{End}(V_\sigma)} \end{array}$$

Eigenschaften der adjungierten Abbildung

K, σ

$V, \quad \beta$ nicht-ausg. herm. SLF.

(1) Die Abb. $\mathrm{End}_K(V) \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$, $f \longmapsto f^*$ ist semilinear $\left(\begin{array}{l} (f+g)^* = f^* + g^* \\ (af)^* = \sigma(a) f^* \end{array} \right)$

und ist ihre eigene Umkehrabb.: $(f^*)^* = f$.

<u>Beweis</u> (brauchen β hermitesch):

$$\beta(f^*(v), w) = \sigma(\beta(w, f^*(v))) = \sigma(\beta(f(w), v)) = \beta(v, f(w))$$

von $f^{**} = f$.

(2) Es gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$ und $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ für alle $f, g \in \mathrm{End}_k(V)$.

(also insbes.: f Isom. $\Rightarrow$ f^* Isom., $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$)

Quiz

Seien K, σ und V wie oben, β eine nicht-ausgeartete Sesquilinearform auf V, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit adjungierter Abbildung f^*.
Zeigen Sie:

$$^{(1)}\ \mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp, \quad ^{(2)}\ \mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp, \quad ^{(3)}\ \mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f).$$

Quiz

Seien K, σ und V wie oben, β eine nicht-ausgeartete Sesquilinearform auf V, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit adjungierter Abbildung f^*.

Zeigen Sie:

$$(1)\quad \mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp, \quad (2)\ \mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp, \quad (3)\ \mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f).$$

(1) $f^*(w) = 0 \iff \forall v \in V: \underbrace{\beta(v, f^*(w))}_{= \beta(f(v), w)} = 0 \iff \forall v' \in \mathrm{Im}(f): \beta(v', w) = 0$

β nicht-asy.

$\iff w \in \mathrm{Im}(f)^\perp$

(2) Wende (1) an auf f^*: $\mathrm{Ker}(\underbrace{f^{**}}_{=f}) = \mathrm{Im}(f^*)^\perp \Rightarrow \mathrm{Ker}(f)^\perp = \underbrace{\mathrm{Im}(f^*)^{\perp\perp}}_{= \mathrm{Im}(f^*)}$

Quiz

Seien K, σ und V wie oben, β eine nicht-ausgeartete Sesquilinearform auf V, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit adjungierter Abbildung f^*.
Zeigen Sie:

$$(1)\ \operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(f)^\perp, \quad (2)\ \operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)^\perp, \quad (3)\ \operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}(f).$$

(3) $\operatorname{rg}(f^*) = \dim \operatorname{Im}(f^*) \underset{\text{Dimfml}}{=} \dim V - \dim \operatorname{Ker}(f^*) \overset{(1)}{=} \dim V - \dim \operatorname{Im}(f)^\perp$

$= \dim \operatorname{Im}(f)$

$= \operatorname{rg}(f).$

Selbstadjungierte Endomorphismen

K, σ, V, β nicht-ausg. herm. dLF

Def. Ein Endom. $f: V \to V$ heißt <u>selbstadjungiert</u>, wenn $f^* = f$ ist.

Quiz

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

Was bedeutet es für die Matrix A, dass der Endomorphismus

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto Av,$$

selbstadjungiert ist?

Quiz

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. $(\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$

Was bedeutet es für die Matrix A, dass der Endomorphismus

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto Av,$$

$$M(f_A^*) = \underbrace{M_{\mathcal{E}}(\beta)^{-1}}_{E_n} \underbrace{A^*}_{A^t} \underbrace{M_{\mathcal{E}}(\beta)}_{E_n}$$

selbstadjungiert ist?

f_A selbstadj. bzgl. Standardskalarprodukt $\Leftrightarrow$ $A = A^t$,

d.h. A symmetrisch.

Skalarprodukte
Vorlesungswoche 11

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Situation

- $\mathbb{R}$, $\underbrace{\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}_{\text{BLF auf } \mathbb{R}\text{-VR}}$

$\mathbb{R}$ 'angeordnet'

$\mathbb{R}_{>0}$

$\mathbb{R}_{<0}$

- $\mathbb{C}$, $\underbrace{\sigma = \text{komplexe Konj.}}_{\text{SLF auf } \mathbb{C}\text{-VR}}$

β hermitesch SLF $\left(\beta(w,v) = \overline{\beta(v,w)} \right)$

$\rightsquigarrow \beta(v,v) = \overline{\beta(v,v)}$

$\Rightarrow \beta(v,v) \in \mathbb{R}$.

Schreibweise: $\mathbb{K}$ Körper – eine dieser beiden Situationen

$a \in \mathbb{K}$. $\quad a > 0 \iff a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Positiv definite Bilinearformen, Sesquilinearformen

Sei V ein endlichdim'l $\mathbb{K}$-VR, β eine hermitesche SLF auf V.

Def (1) Die Form β heißt <u>positiv definit</u>, wenn $\beta(v,v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

(2) positiv semidefinit, wenn $\beta(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$

(3) negativ definit, wenn $\beta(v,v) < 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

(4) negativ semidefinit, wenn $\beta(v,v) \leq 0 \quad \forall v \in V$

(5) indefinit, wenn $v, w \in V$ mit $\beta(v,v) > 0$

$\beta(w,w) < 0$.

Quiz

Untersuchen Sie, welche der folgenden Sesquilinearformen (auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2$) positiv definit, positiv semidefinit, ... sind.

(Es ist jeweils die Strukturmatrix bezüglich der Standardbasis angegeben.)

$K = \mathbb{R}$.

$M_{\mathcal{E}}(\beta)$

$\|$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$K = \mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

Quiz

$$\beta_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x \ y) \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 - y^2$$

Untersuchen Sie, welche der folgenden Sesquilinearformen (auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2$) positiv definit, positiv semidefinit, … sind.

(Es ist jeweils die Strukturmatrix bezüglich der Standardbasis angegeben.)

$K = \mathbb{R}$.

pos. definit — negativ def. — indefinit — pos. semidef. — indefinit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\beta(e_1+e_2, e_1+e_2) = 2$, $\beta(e_1-e_2, e_1-e_2) = -2$.

Standardskalarprod. — β_2

$K = \mathbb{C}$.

Standardskalarprod. → pos. definit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

indefinit

$\beta(e_1+ie_2, e_1+ie_2) = \overbrace{\beta(e_1, ie_2)}^{=-1} + \overbrace{\beta(ie_2, e_1)}^{=-1}$

$\beta(e_1-ie_2, e_1-ie_2) = 2$.

Skalarprodukte

Sei V ein endl.-dim'l $\mathbb{K}$-VR

<u>Def.</u> Eine SLF auf V heißt <u>Skalarprodukt</u>, wenn sie hermitesch und positiv definit ist.

<u>Beispiele</u> Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, auf $\mathbb{C}^n$.

Euklidische Vektorräume

<u>Def</u> Ein endlichdim'l $\mathbb{R}$-VR V zusammen mit einem Skalarprodukt heißt <u>euklidischer Vektorraum</u>.

<u>Schreibweise</u>

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto (v,w)$$

Unitäre Vektorräume

Def. Ein endlich dim'l $\mathbb{C}$-VR V zusammen mit einem Skalarprodukt heißt <u>unitärer Vektorraum</u>.

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz
Vorlesungswoche 11

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

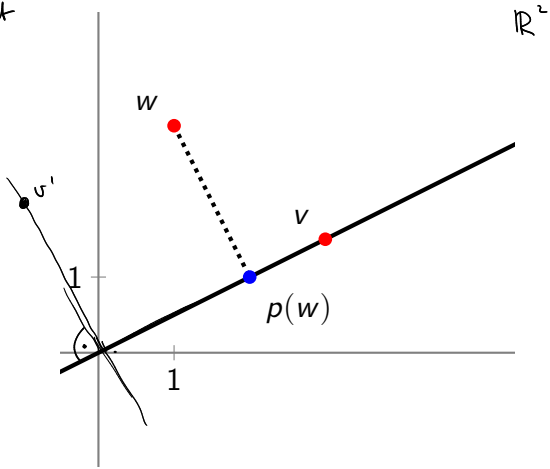
Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$

mit Basis v, w

Sei $v' \in V$ mit $v \perp v'$.

$\rightsquigarrow$ v, v' Basis von V

Sei $p : V \longrightarrow V$ die eind. best. linear Abb mit $v \mapsto v$, $v' \mapsto 0$



Dann gilt $(v, w) = (v, p(w))$

und $$|(v,w)|^2 = \underbrace{(v,v)}_{\|v\|^2} \cdot \underbrace{(p(w), p(w))}_{\|p(w)\|^2}$$

m.a.W. $|(v,w)| = \|v\| \cdot \|p(w)\|$

Wir schreiben $w = av + a'v'$, dann $p(w) = av$, also $\|p(w)\| = |a| \cdot \|v\|$

und $(v,w) = (v, av + a'v') = a(v,v) + a'\underbrace{(v,v')}_{=0} = a \cdot \|v\|^2$

Also $|(v,w)| = |a| \cdot \|v\|^2 = \|v\| \cdot \|p(w)\|$.

Dann gilt $\|p(w)\| \leq \|w\|$

(in der Tat:

$\|p(w)\| = |a| \cdot \|v\|$

$\|w\|^2 = (av + a'v', av + a'v') = |a|^2 \cdot \|v\|^2 + |a'|^2 \cdot \|w\|^2$,

d.h. $\|w\| = \sqrt{|a|^2 \cdot \|v\|^2 + |a'|^2 \cdot \|w\|^2} \geq \underbrace{|a| \cdot \|v\|}_{= \|p(w)\|}$.

Äquivalent

$$|(v,w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

"Ungleichung von Cauchy-Schwarz"

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

<u>Satz</u> Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit einer positiv semidefiniten hermiteschen SLF $(\cdot,\cdot)$.
Dann gilt für alle $v, w \in V$: $\quad |(v,w)|^2 \leq (v,v)\cdot(w,w)$

<u>Zusatz</u> Ist die gegebene Form positiv definit, dann gilt

$$|(v,w)|^2 = (v,v)\cdot(w,w) \iff v, w \text{ linear abhängig.}$$

<u>Beweis</u> Für $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (v - aw, v - aw) = (v,v) - a(v,w) - \bar{a}(w,v) + a\bar{a}(w,w)$$

Ist $(w,w) > 0$, so setzen wir $a := \dfrac{(w,v)}{(w,w)}$ und erhalten

$$0 \leq (v,v) - \frac{(w,v)(v,w)}{(w,w)} \underbrace{- \frac{(v,w)(w,v)}{(w,w)} + \frac{(w,v)(v,w)}{(w,w)}}_{=0}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

also $\quad 0 \leq (v,v) - \dfrac{(w,v)(v,w)}{(w,w)}$, und nach Mult. mit (w,w):

$$(v,v)\cdot(w,w) \geq (w,v)(v,w) = (v,w)\cdot\overline{(v,w)} = |(v,w)|^2 \qquad \checkmark$$

Ist $(v,v) > 0$, so folgt die Aussage, weil man die Rollen von v und w vertauschen kann.

Es bleibt der Fall $(w,w) = (v,v) = 0$ zu betrachten.

In diesem Fall setzen wir $a := (w,v)$ und bekommen

$$0 \leq \underbrace{(v,v)}_{=0} - (w,v)(v,w) - (v,w)(w,v) + |(v,w)|^2 \cdot \underbrace{(w,w)}_{=0} = \underbrace{-2\cdot|(v,w)|^2}_{\leq 0}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Es folgt $|(v,w)|^2 = 0$, also gilt die Ungleichung auch in diesem Fall.

Sind v, w linear abhängig, dann gilt Gleichheit.

Sei nun $(\cdot,\cdot)$ positiv definit und seien $v, w \in V$ mit $|(v,w)|^2 = (v,v)\,(w,w)$

Sei OBdA $w \neq 0$, das bedeutet $(w,w) > 0$ und wieder $a := \dfrac{(w,v)}{(w,w)}$

Ähnlich wie oben sieht man dann

$$(v - aw,\ v - aw) = 0, \qquad \text{also folgt } v = aw,$$

insbes. sind v, w linear abhängig.

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei β eine hermitesche Sesquilinearform auf V.

- Zeigen Sie: Wenn β positiv definit ist, dann ist β nicht-ausgeartet.

- Sei nun β nicht-ausgeartet und positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass β positiv definit ist.

Quiz

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei β eine hermitesche Sesquilinearform auf V.

Zeigen Sie: Wenn β positiv definit ist, dann ist β nicht-ausgeartet.

ebenso

Zu jedem $v \neq 0$ ex. $w \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$, z.B. $w := v$, ... $\beta(w,v) \neq 0$ für $w := v$

Sei nun β nicht-ausgeartet und positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass β positiv definit ist.

Sei $v \in V$, $v \neq 0$. Da β pos. semidefinit, gez: $\beta(v,v) \neq 0$.

Jedenfalls ex. $w \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$, denn β ist nicht-ausgeartet.

Cauchy-Schwarz: $\underbrace{|\beta(v,w)|^2}_{>0} \leq \beta(v,v) \cdot \beta(w,w) \Rightarrow \beta(v,v) \neq 0.$

Die Norm zu einem Skalarprodukt

V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$

Def. Zu $v \in V$ heißt $\|v\| := \sqrt{(v,v)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die <u>Norm</u> oder die <u>Länge</u> von v.

Erhalten Abb. $V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folg. Eigenschaften:

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|av\| = \sqrt{(av,av)} = \sqrt{\bar{a}a\,(v,v)} = |a| \cdot \|v\|, \quad a \in \mathbb{K}$
- "Dreiecksungleichung" $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

<u>Beweis</u> $(v+w,\ v+w) = (v,v) + \underbrace{(v,w) + (w,v)} + (w,w)$

$$= (v,w) + \overline{(v,w)}$$

$z = a + ib \in \mathbb{C}$

$z + \bar{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$a \leq |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

$$= (v,v) + 2\,\mathrm{Re}\big((v,w)\big) + (w,w)$$

$$\leq (v,v) + 2\,\big|(v,w)\big| + (w,w)$$

$$\leq (v,v) + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + (w,w)$$

Cauchy-Schwarz

$$= \big(\|v\| + \|w\|\big)^2 .$$

Quiz

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$.

Wir definieren den Abstand von $v, w \in V$ durch $d(v, w) = \|w - v\|$.

$(= \|v - w\|)$

Zeigen Sie, dass für alle $u, v, w \in V$ gilt:

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w).$$

Warum heißt die Dreiecksungleichung Dreiecksungleichung?

Quiz

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$.

Wir definieren den Abstand von $v, w \in V$ durch $d(v,w) = \|w - v\|$.

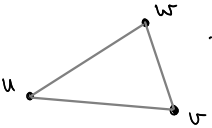
Zeigen Sie, dass für alle $u, v, w \in V$ gilt:

$$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w).$$

$$\begin{aligned} d(u,w) &= \|w-u\| \\ &= \|v-u+w-v\| \\ &\leq \|v-u\| + \|w-v\| \\ &= d(u,v) + d(v,w) \end{aligned}$$

D-Ungl. für $\|\cdot\|$

Warum heißt die Dreiecksungleichung Dreiecksungleichung?



Die Summe der Längen zweier Seiten eines Dreiecks ist größer (oder gleich) als die Länge der dritten Seite.

Orthogonalität und Winkel

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$

- $v, w \in V$ heißen orthogonal zueinander, wenn $(v,w) = 0$

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d.h. $(V, (\cdot,\cdot))$ ist ein euklidischer VR.

  Für $v, w \in V$ gilt dann $|(v,w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$,

  Cauchy-Schwarz

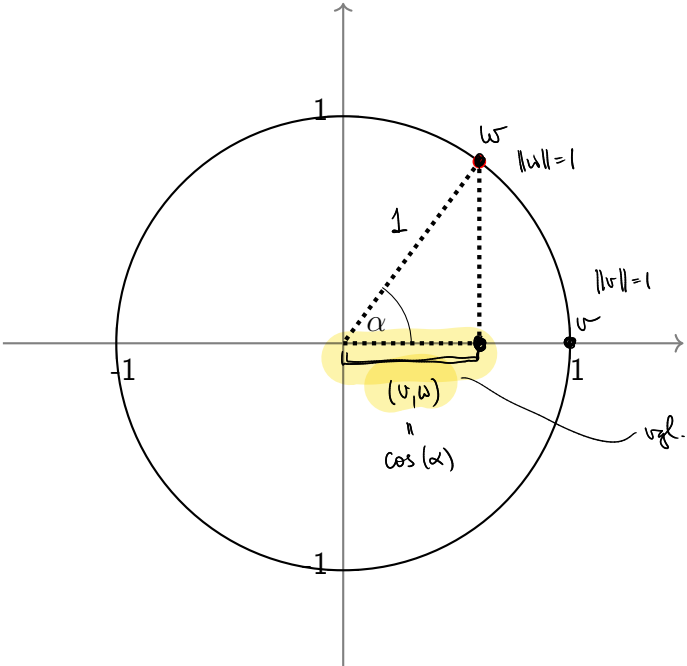
  d.h. $-1 \leq \dfrac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$

$\Rightarrow$ es ex. eine eind. bestimmte Zahl $\vartheta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Wir nennen ϑ den Winkel zwischen v und w.

$$\frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$



vgl. Begin dress Videos.

Das Verfahren von Gram-Schmidt
Vorlesungswoche 11

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Orthogonalität, Orthogonalsysteme

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} & (\sigma = \mathrm{id}) \\ \mathbb{C} & (\sigma = \text{kompl. Konj.}) \end{cases}$$

Def Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.

Eine Familie $v_1, \dots, v_m \in V$ heißt <u>Orthogonalsystem</u>, wenn $v_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j$.

Gilt zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle i, so sprechen wir von einem <u>Orthonormalsystem</u>.

Wenn $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von V bilden, dann nennen wir diese Familie eine <u>Orthogonalbasis</u> bzw. eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB).

Quiz

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Sei $v_1, \ldots, v_m \in V$ ein Orthogonalsystem.

Zeigen Sie, dass die Familie $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig ist.

Quiz

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Sei $v_1, \ldots, v_m \in V$ ein Orthogonalsystem.

Zeigen Sie, dass die Familie $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig ist.

Sei $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$, $a_i \in \mathbb{K}$

Wende $(v_i, \quad)$ $\rightsquigarrow$ $0 = \left(v_i, \sum_j a_j v_j\right) = \sum a_j (v_i, v_j) = a_i \underbrace{(v_i, v_i)}_{\neq 0}$

$\Rightarrow$ $a_i = 0$

Das Verfahren von Gram und Schmidt

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit SP $(\cdot,\cdot)$.

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.

Dann existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit den folg. Eig.:

(a) $v_1, \ldots, v_n$ ist eine Orthonormalbasis

(b) für alle i gilt $\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle b_1, \ldots, b_i \rangle$

(c) für alle i gilt mit $\mathcal{B}_i = (b_1, \ldots, b_i)$, $\mathcal{C}_i = (v_1, \ldots, v_i)$

$$\det M_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{C}_i} \in \mathbb{R}_{>0}$$

Durch diese Bedingungen sind $v_1, \ldots, v_n$ eind. bestimmt, und zwar gilt

$$v_i = \frac{v_i'}{\|v_i'\|}, \quad \text{mit} \quad v_i' = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_k, b_i) \cdot v_k$$

Beweis durch Induktion nach $n = \dim V$.

$\underline{n=1}$. $v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ erfüllt die Bed. und ist offenbar die einzige Möglichkeit.

$\underline{n>1}$ Nach IV, angewandt auf $\langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ können wir annehmen:

$v_1, \dots, v_{n-1}$ bereits konstruiert, eind. best., geg. durch Formel im Satz.

zz: es ex. v_n, so $v_1, \dots, v_n$ Eig (a), (b), (c) hat, eind., Formel

Existenz Wir definieren $v_n' := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_k, b_n) v_k \neq 0$

Dann $(v_i, v_n') = (v_i, b_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (v_k, b_n) \underbrace{(v_i, v_k)}_{\substack{= 0 \ \forall i \neq k \\ = 1 \text{ für } i = k}} = 0.$

$(i = 1, \dots, n-1)$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{v_1, \dots, v_{n-1}, \; v_n := \frac{v_n'}{\|v_n'\|}}_{\mathcal{C}} \quad \text{ONB mit Eig (b)}$$

zu (c):

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_{n-1}}^{\mathcal{C}_{n-1}} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 \;\text{———}\; 0 & \|v_n'\|^{-1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \underbrace{\det\left(M_{\mathcal{B}_{n-1}}^{\mathcal{C}_{n-1}}\right)}_{\in \mathbb{R}_{>0}} \cdot \underbrace{\|v_n'\|^{-1}}_{\in \mathbb{R}_{>0}}.$$

<u>Eindeutigkeit</u> Es ist klar, dass v_n die Form

$$v_n = a_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i \quad \text{hat}, \quad a_n \neq 0$$

Wegen (c) muss $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\underbrace{v_1 \text{ — } v_{n-1}}_{b_1 \text{ — } b_{n-1}} \quad \underset{b_n}{v_n}$$

Außerdem muss gelten

$$0 = (v_k, v_n) = a_n (v_k, b_n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \underbrace{(v_k, v_i)}_{=0,\ i \neq k} = a_n \cdot (v_k, b_n) + a_k$$

also $\quad a_k = -a_n (v_k, b_n)$, d.h.

$$v_n = a_n \underbrace{\left(b_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_i, b_n)\, v_i \right)}_{\text{Formel für } v_n'}, \qquad a_n \in \mathbb{R}_{>0}$$

und $\quad 1 = \|v_n\| = |a_n| \cdot \|v_n'\| = a_n \cdot \|v_n'\| \rightsquigarrow a_n = \dfrac{1}{\|v_n'\|}$.

Quiz

Wenden Sie das Verfahren an auf die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

von $\mathbb{R}^3$

(mit Standard-Skalarprod.)

Quiz

$$\|v_2'\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

Wenden Sie das Verfahren an auf die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

von $\mathbb{R}^3$ (mit Standard-Skalarprod.)

$$v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2' = b_2 - \underbrace{(v_1, b_2)}_{-2} v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = b_3 - \underbrace{(v_1, b_3)}_{0} v_1 - \underbrace{(v_2, b_3)}_{3/5} v_2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ 0 \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Korollar: Existenz von Orthonormalbasen

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt β.

Dann existiert eine ONB $\mathcal{B}$ von V für β.

m.a.W. $M_{\mathcal{B}}(\beta) = E_n$.

<u>Korollar</u> V ein $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt β. Sei $\mathcal{C}$ eine Basis von V.

Dann $\det(M_{\mathcal{C}}(\beta)) \in \mathbb{R}_{>0}$

<u>Beweis</u> Sei $\mathcal{B}$ eine ONB. Dann gilt $M_{\mathcal{C}}(\beta) = (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\beta) M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$,

also $$\det\left(M_{\mathcal{C}}(\beta)\right) = \underbrace{\det\left(\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^*\right)}_{\overline{\det\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)}} \cdot \underbrace{\det\left(M_{\mathcal{B}}(\beta)\right)}_{=1} \cdot \det\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)$$

$$= \left|\det\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)\right|^2 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Quiz

Noch einmal Cauchy-Schwarz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$,

seien $v, w \in V$ linear unabhängig.

Zeigen Sie $\det \begin{pmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Folgern Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für v und w.

Quiz

Noch einmal Cauchy-Schwarz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$,

seien $v, w \in V$ linear unabhängig.

Die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen UVR ist ein Skalarprodukt.

Hier: $U := \langle v, w \rangle \subseteq V$ mit Basis $\mathcal{B} = (v, w)$

Zeigen Sie $\det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = \det\left(M_{\mathcal{B}}\left((\cdot,\cdot)|_{U \times U} \right) \right) > 0$$

Folgern Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für v und w.

$$0 < \det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = (v,v)\cdot(w,w) - \underbrace{(v,w)(w,v)}_{= |(v,w)|^2},$$

also

$$|(v,w)| < \|v\| \cdot \|w\|.$$