Übersicht

Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung

...

Der Dualraum eines Vektorraums

V VR / K

$V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

Analytische Geometrie in $\mathbb{R}^n$

Abstand $\quad d(v,w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (w_i - v_i)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$v = (v_i)_i \ , \quad w = (w_i)_i$

Länge eines Vektors $\quad \|v\| = d(v, 0) \ , \qquad d(v,w) = \|w - v\|$

"Standardskalarprodukt" $\quad v \cdot w := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Sesquilinearformen und Bilinearformen

Bilinearform $\quad V \times W \longrightarrow K$

linear in beiden Einträgen

Sesquilinearform $\quad V \times W \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}$

linear im zweiten Eintrag $\quad w \mapsto \beta(v,w)$ linear $\quad$ (für alle $v \in V$)

"semilinear" im ersten Eintrag: $\quad \beta(v+v',w) = \beta(v,w) + \beta(v',w)$ $\quad$ (für alle $w \in W$)

$$\beta(av,w) = \bar{a} \cdot \beta(v,w)$$

$\bar{a}$ komplex konj.

Strukturmatrix und Basiswechsel

$\beta : V \times V \to K \quad \rightsquigarrow \quad M_{\mathcal{B}}(\beta) = \big(\beta(b_i, b_j)\big)_{i,j}$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

Der Dualraum und Bilinearformen

$$\beta : V \times W \to K \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} V &\xrightarrow{\Phi(\beta)} W^\vee \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} W \to K \\ w \mapsto \beta(v,w) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das orthogonale Komplement eines Untervektorraums

in $\mathbb{R}^n$: $\quad v \perp w \quad$ "senkrecht" $\iff \quad v \cdot w = 0$

allg.: $\quad v \perp w \iff \beta(v,w) = 0$

für V mit

$\beta : V \times V \to K$

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Analytische Geometrie in $\mathbb{R}^n$

- Abstand zwischen Punkten
- Winkel zwischen Vektoren

Der Abstand von Punkten in $\mathbb{R}^n$

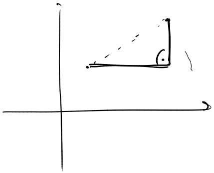
vgl. Wo 8, LA 1

Def. Seien $v = (v_1, \dots, v_n)^t$, $w = (w_1, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

Dann heißt

$$d(v,w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (w_i - v_i)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

der (euklidische) Abstand von v und w.



Die Norm eines Vektors

Def. Für $v = (v_1, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\|v\| := d(v, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

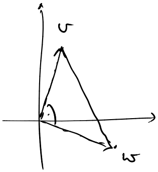
die Norm (oder: die Länge) des Vektors v.

Dann gilt $d(v,w) = \|w - v\|$.

<u>Eigenschaften</u>

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ „Dreiecksungleichung"
- $\|a v\| = |a| \cdot \|v\|$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Orthogonalität



Idee: v, w senkrecht $\iff$ Satz des Pythagoras gilt für das Dreieck mit Ecken $0, v, w$

$$\iff \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|w-v\|^2$$

Def. Das <u>Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$</u> ist die Abb.

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v,w) \longmapsto v \cdot w := \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|w-v\|^2 \right)$$

Def $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen senkrecht (oder: orthogonal) zueinander, wenn $v \cdot w = 0$. Wir schreiben dann $v \perp w$.

Das Standardskalarprodukt

Man rechnet leicht nach, dass für $v = (v_1 \ldots v_n)^t$, $w = (w_1, \ldots w_n)^t \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$v \cdot w = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|w - v\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \underbrace{v^t w}_{\text{Matrizenprodukt.}} \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften.

$a, a' \in \mathbb{R}$, $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$

- symmetrisch: $v \cdot w = w \cdot v$
- linear im ersten Eintrag: $(av + a'v') \cdot w = a(v \cdot w) + a'(v' \cdot w)$
- linear im zweiten Eintrag: $v \cdot (aw + a'w') = a(v \cdot w) + a'(v \cdot w')$
- positiv definit: $v \cdot v \geq 0$ und $v \cdot v = 0 \iff v = 0$.

Quiz

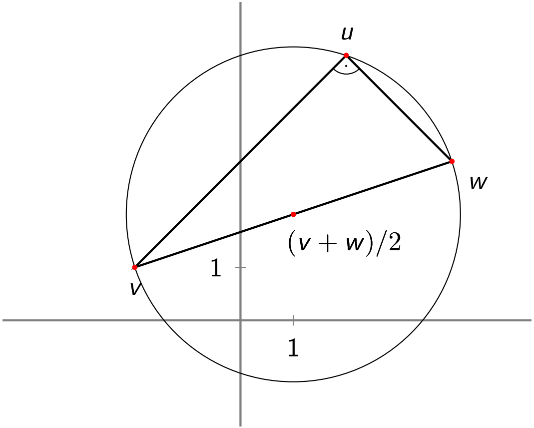
Beweisen Sie:

Satz des Thales

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, so dass u auf dem Kreis

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, (v+w)/2) = d(v,w)/2\}$$

mit Mittelpunkt $(v+w)/2$ und Radius $d(v,w)/2$ liegt. Dann bilden u, v, w ein rechtwinkliges Dreieck, mit rechtem Winkel an der Ecke u.



Quiz

(*) $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \quad \left(= \sqrt{\sum x_i^2}\right)$

Beweisen Sie: $\quad d(m,u) = \|m-u\|$

Satz des Thales

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, so dass u auf dem Kreis

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x,(v+w)/2) = d(v,w)/2\}$$

mit Mittelpunkt $(v+w)/2$ und Radius $d(v,w)/2$ liegt. Dann bilden u, v, w ein rechtwinkliges Dreieck, mit rechtem Winkel an der Ecke u.

zu zeigen: $\quad (v-u) \perp (w-u)$

Sei $m = \frac{v+w}{2}$, $\quad r = \frac{d(v,w)}{2}$, also

$d(m,u) = r.$

Wir erhalten (*)

$$\underbrace{(m-u)\cdot(m-u)}_{\frac{1}{4}(v\cdot v + 2\cdot v\cdot w + w\cdot w) - v\cdot u - w\cdot u + u\cdot u} = \underbrace{\frac{1}{4}(w-v)\cdot(w-v)}_{\frac{1}{4}(v\cdot v - 2v\cdot w + w\cdot w)}$$

also $\quad (v-u)\cdot(w-u) = \underbrace{v\cdot w - v\cdot u - w\cdot u + u\cdot u}_{= 0}$

Der Winkel zwischen Vektoren

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zeigt, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$-\|v\| \cdot \|w\| \leq v \cdot w \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

d.h. $$\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \in [-1, 1].$$

Daher ex. eine eind. bestimmte Zahl $\vartheta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \vartheta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$ Wir nennen ϑ den Winkel zwischen v und w.

Bilinearformen und Sesquilinearformen

Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Skalarprodukt über $\mathbb{C}$?

Auf $\mathbb{R}^n$: $\quad v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

$$\|v\| = \sqrt{\sum v_i^2} = \sqrt{v \cdot v}$$

Ist $v \in \mathbb{C}^n$, so ist $\sum_{i=1}^{n} v_i v_i$ nicht unbedingt in $\mathbb{R}$, erst recht nicht unbedingt in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $\rightarrow$ erhalte keinen guten Begriff für "Länge eines Vektors" (sollte $\in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sein)

Haben den Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$: $\quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

wobei $\bar{z}$ komplexe Konjugation, d.h. für $z = a+ib$ sei $\bar{z} = a-ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ betrachte $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}$, $\quad (v,w) \mapsto v \cdot w := \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\, w_i$

"Standardskalarprodukt"

$\rightsquigarrow$ Länge / Norm von $v \in \mathbb{C}^n$: $\quad \|v\| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\, v_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Allerdings: Die Abb. β ist zwar linear im zweiten Eintrag, aber nicht im ersten Eintrag:

$$(v+v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w \quad \checkmark$$

aber im allg.

$$\underbrace{(av) \cdot w}_{= \, \bar{a} \cdot (v \cdot w)} \neq a \cdot (v \cdot w)$$

"semilinear bzgl. kompl. Konj."

Außerdem: β nicht symmetrisch: $\quad v \cdot w = \overline{w \cdot v} \quad$ "hermitesch"

Körperautomorphismen

Sei K ein Körper. Ein Ringautomorphismus $K \xrightarrow{\sim} K$ heißt auch Körperautomorphismus.

Wir fixieren im folgenden

- einen Körper K
- mit einem Körperautomorphismus $\sigma : K \xrightarrow{\sim} K$ mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_K$, m.a.W. $\sigma^{-1} = \sigma$ ("Involution")

Beispiele

- K Körper, $\sigma = \mathrm{id}_K$
- $\mathbb{C}$, σ = komplexe Konj.

Sesquilinearformen und Bilinearformen

K, σ

Def. Seien V, W VR über K

(1) Eine Abb. $f: V \to W$ heißt semilinear (bezüglich σ), wenn f ein Gruppenhomom. der add. Gruppen V, W ist: $f(v+v') = f(v) + f(v')$ und für alle $a \in K$, $v \in V$: $f(av) = \sigma(a) f(v)$.

(2) Eine Abb. $\beta: V \times W \to K$ heißt Sesquilinearform auf $V \times W$, wenn β semilinear im ersten Eintrag und linear im zweiten Eintrag ist, d.h. für alle $a, a' \in K$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$:

$$\beta(av + a'v', w) = \sigma(a)\beta(v,w) + \sigma(a')\beta(v',w)$$

$$\beta(v, aw + a'w') = a\beta(v,w) + a'\beta(v,w')$$

(3) Wir bezeichnen mit $SLF(V, W)$ die Menge aller SLF $V \times W \to K$,

und schreiben $SLF(V) := SLF(V, V)$.

Ist $\sigma = id_K$, so spricht man von <u>Bilinearformen</u> statt SLF.

Wir bezeichnen mit $BLF(V, W)$ die Menge der BLF $V \times W \to K$,

und $BLF(V) := BLF(V, V)$.

Dann sind $SLF(V, W)$, $BLF(V, W)$ Vektorräume über K.

Beispiele

(1) Die Multiplikation $K \times K \to K$ ist eine BLF.

(2) Ist V ein K-VR mit Dualraum $V^\vee$, so ist

$$V^\vee \times V \longrightarrow K, \qquad (\lambda, v) \longmapsto \lambda(v),$$

eine BLF.

(3) Das "Standardskalarprodukt"

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(v, w) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\, w_i$$

ist eine SLF

(4) Das "Standardskalarprodukt"

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i$$

ist eine BLF

Hermitesche Sesquilinearformen

Seien K, σ wie oben, V ein K-VR.

Eine SLF $\beta : V \times V \to K$ heißt hermitesch, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\beta(w,v) = \sigma(\beta(v,w))$$

Ist $\sigma = id_K$, so nennt man eine BLF $\beta : V \times V \to K$ symmetrisch, wenn für alle $v, w \in V$ gilt: $\beta(w,v) = \beta(v,w)$.

Nicht-ausgeartete Sesquilinearformen

Sei $\beta : V \times W \to K$ ein SLF.

Def. Wir nennen β <u>nicht-ausgeartet</u>, wenn für alle $v_0 \in V$, $w_0 \in W$ gilt:

(a) wenn $\beta(v_0, w) = 0$ für alle $w \in W$, dann gilt $v_0 = 0$

(b) wenn $\beta(v, w_0) = 0$ für alle $v \in V$, dann gilt $w_0 = 0$.

Quiz

Untersuchen Sie, ob die folgenden Bilinearformen / Sesquilinearformen symmetrisch bzw. hermitesch sind. Sind sie nicht-ausgeartet?

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$.

Quiz

Untersuchen Sie, ob die folgenden Bilinearformen / Sesquilinearformen symmetrisch bzw. hermitesch sind. Sind sie nicht-ausgeartet?

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ ((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$ nicht-ausgeartete symmetrische BLF

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ ((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$ nicht-ausgeartete symmetrische BLF

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ ((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$ nicht-ausgeartete hermitesche SLF

(bezüglich der komplexen Konjugation)

Quiz

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen Bilinearformen oder Sesquilinearformen sind. Sind sie symmetrisch bzw. hermitesch? Sind sie nicht-ausgeartet?

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2$.

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto x_1 y_1$.

$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$.

$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \overline{x_1} y_2 - \overline{x_2} y_1$.

Quiz

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen Bilinearformen oder Sesquilinearformen sind. Sind sie symmetrisch bzw. hermitesch? Sind sie nicht-ausgeartet?

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. keine BLF / SLF in unserem Sinne (nicht linear im zweiten Eintrag)

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2$. keine BLF (nicht linear im ersten/zweiten Eintrag)

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto x_1 y_1$. symmetrische BLF, ausgeartet $\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto 0 \right)$

$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$. nicht-ausg. BLF, nicht symmetrisch

$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \overline{x_1} y_2 - \overline{x_2} y_1$. nicht-ausg SLF, nicht hermitesch

Die Strukturmatrix einer Sesquilinearform

Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Hermitesche Matrizen

Seien K ein Körper, σ ein Autom. von K mit $\sigma^2 = \mathrm{id}_K$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Def. Für $A \in M_{m\times n}(K)$ bezeichnen wir mit A^* die Matrix $\in M_{n\times m}(K)$, die aus A^t entsteht, indem auf jeden Eintrag σ angewendet wird.

Falls $\sigma = \mathrm{id}_K$: $A^* = A^t$.

Nachrechnen: $(AB)^* = B^* A^*$.

Insbes.: $A \in M_n(K)$ invertierbar $\Rightarrow$ A^* invertierbar, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Def. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt symmetrisch, falls $A^t = A$, und $A \in M_n(K)$ heißt hermitesch, falls $A^* = A$.

Die Strukturmatrix einer Sesquilinearform

<u>Satz</u> Sei V ein endlich dim'l VR mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Die Abb.

$$\begin{aligned} SLF(V) &\longrightarrow M_n(K) \\ \beta &\longmapsto M_{\mathcal{B}}(\beta) := \big(\beta(b_i, b_j)\big)_{i,j} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\beta)$ heißt die <u>Strukturmatrix</u> von β bzgl. $\mathcal{B}$.

Ist $c_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ der Koordinatenisom. zu $\mathcal{B}$, dann gilt

$$\beta(v, w) = c_{\mathcal{B}}(v)^* \cdot M_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot c_{\mathcal{B}}(w)$$

__Beweis.__ Linearität: leichte Rechnung.

Die Umkehrabb. ist gegeben durch

$$B \longmapsto \Big((v,w) \longmapsto c_{\mathcal{B}}(v)^* \cdot B \cdot c_{\mathcal{B}}(w) \Big)$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Abb. zueinander invers sind.

z.B.

$$\beta\Big(\sum a_i b_i \,,\, \sum c_i b_i\Big) \overset{\text{SLF}}{=} \sum_{i,j} \sigma(a_i)\, c_j\, \beta(b_i, b_j)$$

$$= \underbrace{\big(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)\big)}_{} \cdot M_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{}$$

Quiz

Berechnen Sie die Strukturmatrix des Standardskalarprodukts $\beta_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}^n$ und des Standardskalarprodukts $\beta_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}^n$ bezüglich der Standardbasen.

Berechnen Sie $\beta(\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix})$ für die Sesquilinearform $\beta\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$M_{\mathscr{E}}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\mathscr{E} \text{ die Standardbasis.})$$

Quiz

Berechnen Sie die Strukturmatrix des Standardskalarprodukts $\beta_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}^n$ und des Standardskalarprodukts $\beta_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}^n$ bezüglich der Standardbasen.

$$M_{\mathcal{E}}(\beta_{\mathbb{R}}) = E_n, \qquad M_{\mathcal{E}}(\beta_{\mathbb{C}}) = E_n.$$

Berechnen Sie $\beta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ für die Sesquilinearform $\beta\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$M_{\mathscr{E}}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\mathscr{E} \text{ die Standardbasis.})$$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Nicht-ausgeartete Sesquilinearformen

<u>Bem</u> Eine SLF $V \times V \xrightarrow{\beta} K$ ist genau dann hermitesch, wenn für eine / jede Basis $\mathcal{B}$ von V die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\beta)$ hermitesch ist: $M_{\mathcal{B}}(\beta)^* = M_{\mathcal{B}}(\beta)$

$$\left[\beta \text{ hermitesch} \Rightarrow \forall i,j \quad \beta(b_j, b_i) = \sigma(\beta(b_i, b_j))\right]$$

Eine BLF $V \times V \xrightarrow{\beta} K$ ist genau dann symmetrisch, wenn für eine / jede Basis $\mathcal{B}$ von V die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\beta)$ symmetrisch.

Nicht-ausgeartete Sesquilinearformen

Satz Sei V ein endlich-dim'l K-VR mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

Sei $\beta : V \times V \to K$ eine SLF. Dann sind äquivalent:

(i) $M_{\mathcal{B}}(\beta)$ ist invertierbar

(ii) β ist nicht-ausgeartet

(iii) für alle $v \neq 0$ ex. $w \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$

(iv) für alle $w \neq 0$ ex. $v \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$

Beweis Sei $B := M_{\mathcal{B}}(\beta)$. Nach Definition ist (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) und (iv)

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei B invertierbar und sei $v \in V$ mit

$$c_{\mathcal{B}}(v)^* \, B \, c_{\mathcal{B}}(w) = \beta(v,w) = 0 \quad \text{für alle } w \in V.$$

Dann folgt $c_{\mathcal{B}}(v)^* \cdot w = 0$ für alle $w \in K^n$. Also $c_{\mathcal{B}}(v)^* = 0$.

Es folgt $c_{\mathcal{B}}(v) = 0$, d.h. $v = 0$. Analog: (i) $\Rightarrow$ (iv).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es gilt $\left(B^* c_{\mathcal{B}}(v)\right)^* = c_{\mathcal{B}}(v)^* \, B \neq 0$

für alle $v \neq 0$, d.h. $B^* \cdot c_{\mathcal{B}}(v) \neq 0$

Also $\operatorname{Ker}(B^*) = 0$, d.h. B^* (und damit B) invertierbar.

Ähnlich: (iv) $\Rightarrow$ (i)

Basiswechsel

<u>Satz</u> Sei V ein endlich dim'l K-VR, und seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ Basen von V.

Sei $\beta : V \times V \to K$ eine SLF. Dann gilt

$$M_{\mathcal{C}}(\beta) = \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^* \cdot M_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$$\boxed{(*) \quad c_{\mathcal{B}}(v) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot c_{\mathcal{C}}(v)}$$

<u>Beweis</u> Schreibe $B := M_{\mathcal{B}}(\beta)$, $C := M_{\mathcal{C}}(\beta)$

Dann gilt

$$c_{\mathcal{C}}(v)^* \, C \, c_{\mathcal{C}}(w) = \beta(v,w) = c_{\mathcal{B}}(v)^* \, B \, c_{\mathcal{B}}(w)$$

$$\underset{(*)}{=} \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot c_{\mathcal{C}}(v)\right)^* \cdot B \cdot \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \, c_{\mathcal{C}}(w)\right)$$

$$= c_e(v)^* \cdot (M^e_{\mathcal{B}})^* \cdot B \cdot M^e_{\mathcal{B}} \cdot c_e(w)$$

Daraus folgt die Beh., indem man $v = c_1, \ldots, c_n$, $w = c_1, \ldots, c_n$.

Kongruente Matrizen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $B, C \in M_n(K)$.

Wir nennen B, C kongruent, wenn $S \in GL_n(K)$ ex.

mit $C = S^t B S$ ("$\sigma = id_K$")

Wir nennen B, C hermitesch kongruent, wenn $S \in GL_n(K)$ ex.

mit $C = S^* B S$.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel von zueinander kongruenten Matrizen über $\mathbb{R}$, die unterschiedliche Determinante haben.

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zueinander kongruent und sei $\det(A) > 0$.
Zeigen Sie, dass $\det(B) > 0$ gilt.

Quiz

Geben Sie ein Beispiel von zueinander kongruenten Matrizen über $\mathbb{R}$, die unterschiedliche Determinante haben.

- (1), $(4) \in M_1(\mathbb{R})$, oder
- $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & \\ & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, ...

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zueinander kongruent und sei $\det(A) > 0$.
Zeigen Sie, dass $\det(B) > 0$ gilt.

Bilinearformen und Dualraum
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 2, SS 21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Bilinearformen und der Dualraum

Sei K ein Körper

<u>Satz</u>. Seien V, W VR über K. Dann ist die Abb.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{BLF}(V, W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee) \\ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\quad & \\ (\beta : V \times W \to K) &\longmapsto \left(v \mapsto \begin{pmatrix} W \to K \\ w \mapsto \beta(v,w) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-VR.

Umkehrabb. $\Phi' : \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee) \to \mathrm{BLF}(V,W)$, $f \mapsto \begin{pmatrix} V \times W \longrightarrow K \\ (v,w) \mapsto f(v)(w) \end{pmatrix}$

<u>Analog:</u> $$\Psi : \mathrm{BLF}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W, V^\vee)$$
$$\beta \longmapsto \left(w \longmapsto \begin{pmatrix} V \to K \\ v \mapsto \beta(v,w) \end{pmatrix} \right)$$

Wenn W endlichdimensional ist, dann gilt:

$$\underbrace{\Psi(\beta)}_{W \to V^\vee} = \underbrace{\Phi(\beta)^\vee}_{W^{\vee\vee} \to V^\vee}$$

(wenn man wie üblich $W^{\vee\vee}$ mit W identifiziert

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\Psi(\beta)"] \arrow[dr, "\cong"'] & V^\vee \\ & W^{\vee\vee} \arrow[u, "\Phi(\beta)^\vee"'] \end{tikzcd}$$
)

<u>Begr:</u> Ein Element $w \in W$ korrespondiert zu
$\begin{pmatrix} W^\vee \to K \\ \lambda \mapsto \lambda(w) \end{pmatrix} \in W^{\vee\vee}$, wird also dann unter $\Phi(\beta)$ abgebildet auf $\begin{pmatrix} V \to K \\ v \mapsto \underbrace{\Phi(\beta)(v)(w)}_{\beta(v,w)} \end{pmatrix} \in V^\vee$

Quiz

Sei $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von V, $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von W.

Sei $\beta\colon V \times W \to K$ eine Bilinearform.

Berechnen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}^\vee}(\Phi(\beta))$.

$$\Phi(\beta): V \longrightarrow W^\vee$$
$$v \longmapsto (w \mapsto \beta(v,w))$$

Quiz

Sei $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_m)$ eine Basis von V, $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$ eine Basis von W.
Sei $\beta \colon V \times W \to K$ eine Bilinearform.

Berechnen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}^\vee}(\Phi(\beta))$.

$$\Phi(\beta) : V \longrightarrow W^\vee$$
$$v \longmapsto (w \mapsto \beta(v, w))$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(\beta)(b_j) : W \longrightarrow K \\ \qquad c_i \longmapsto \beta(b_j, c_i) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \Phi(\beta)(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta(b_j, c_i)\, c_i^\vee$$

Also $$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}^\vee}(\Phi(\beta)) = \big(\beta(b_j, c_i)\big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Im Fall $V = W$, $\mathscr{B} = \mathscr{C}$:

$$\boxed{M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}^\vee}(\Phi(\beta)) = M_{\mathscr{B}}(\beta)^t.}$$

Nicht-ausgeartete Bilinearformen

Satz Sei $V = W$ endlichdim'l, $\Phi : BLF(V) \longrightarrow Hom(V, V^\vee)$ wie oben.

$\Psi : BLF(V) \longrightarrow Hom(V, V^\vee)$

Sei $\beta : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Dann sind äquivalent:

(i) β ist nicht-ausgeartet

(ii) $\Phi(\beta)$ ist injektiv

(iii) $\Phi(\beta)$ ist ein Isomorphismus

(iv) $\Psi(\beta)$ ist injektiv.

Äquivalenz von

(ii), (iii) :

$\Phi(\beta)$ Homom. zwischen VR derselben endlichen Dimension

(iii), (iv) :

$\Psi(\beta) = \Phi(\beta)^\vee$ + Dimensionsarg.

$\Phi(\beta)$ injektiv $\iff$ $\mathrm{Ker}(\Phi(\beta)) = 0$ $\iff$ nur für $v = 0$ gilt

$\Phi(\beta)(v) = 0 \quad \in W^\vee$

$\iff$ nur für $v = 0$ gilt

$\underbrace{\Phi(\beta)(v)(w)}_{\beta(v,w)} = 0 \;\forall\; w \in W$

Damit sehen wir:

(i) per Def. äquivalent

zu (ii) + (iv)

Sesquilinearformen und der Dualraum

$$\Phi : \mathrm{BLF}(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(V,W)$$
$$\beta \mapsto (v \mapsto (w \mapsto \beta(v,w)))$$

Sei K ein Körper mit Automorphismus $\sigma : K \to K$, $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_K$.

Sei V ein K-VR.

Definiere K-VR V_σ durch
- als Menge sei $V_\sigma = V$
- Addition: wie auf V
- Skalarmultiplikation: $K \times V_\sigma \to V_\sigma$, $(a, v) \mapsto a \cdot_\sigma v := \underbrace{\sigma(a) v}_{\text{Skalarmult. auf } V}$

- Dann $f : V \to W$ semilinear $\iff$ $V_\sigma \xrightarrow{f} W$ linear, $v \mapsto f(v)$

$f(av) = \sigma(a) f(v)$

$$f(a \cdot_\sigma v) = f(\sigma(a) v) = \sigma^2(a) f(v) = a f(v)$$

• Entsprechend: $\beta : V \times W \to K$ SLF $\iff$ $V_\sigma \times W \to K$, $(v,w) \mapsto \beta(v,w)$ BLF $(*)$

Bem. Ist $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, dann ist $(b_i)_{i\in I}$ auch eine Basis von V_σ.

Insbes.: $\dim V = \dim V_\sigma$.

Ist $f : V \to W$ ein Homom., so ist auch $f : V_\sigma \to W_\sigma$, $v \mapsto f(v)$ ein Homom.

Aus $(*)$ erhalten wir

$$\Phi : \mathrm{SLF}(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V_\sigma, W^\vee), \quad \beta \mapsto \left(v \mapsto \begin{pmatrix} W \to K \\ w \mapsto \beta(v,w) \end{pmatrix}\right)$$

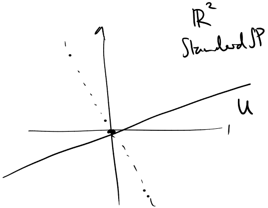
$$\Psi : \mathrm{SLF}(V,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(W, (V_\sigma)^\vee)$$ Isomorphismen von VR.

Der Satz über die Eigenschaft "nicht-ausgeartet" gilt dann analog wie für BLF.

Das orthogonale Komplement eines Untervektorraums

Sei V ein K-VR mit einer hermiteschen SLF $\beta: V \times V \to K$. $\quad \beta(w,v) = \sigma(\beta(v,w))$

Def. Wir nennen $v, w \in V$ orthogonal (oder senkrecht) zueinander, wenn $\beta(v,w) = 0$. Wir schreiben dann $v \perp w$.



Def. Sei $U \subseteq V$ ein UVR. Dann heißt

UVR

$$U^{\perp} = \{ v \in V \,;\, \beta(v,u) = 0 \;\; \forall\, u \in U \} \subseteq V$$

das orthogonale Komplement von U

⚠ Im allg. ist $U^{\perp}$ kein Komplementärraum zu U $\quad \left(\beta(v,w) = 0 \;\; \forall\, v, w \;\; \rightsquigarrow \;\; V^{\perp} = V \right)$

Dimension des orthogonalen Komplements

<u>Satz</u> Sei V ein endlichdim'l VR und β eine nicht-ausg. herm. SLF auf V.
Sei $U \subseteq V$ ein UVR. Dann gilt

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

<u>Beweis</u> Sei $\Phi(\beta) : V_\sigma \to V^\vee$ wie oben $\left(v \mapsto \begin{pmatrix} V \to K \\ w \mapsto \beta(v,w)\end{pmatrix}\right)$,
ein Isomorphismus, weil β nicht-ausg. ist.

$$\Rightarrow \quad \Phi(\beta)\Big(\underset{\substack{\cap\!| \ \text{UVR} \\ V_\sigma}}{U^\perp}\Big) = \{\lambda \in V^\vee \,;\, \lambda(u) = 0 \ \forall u \in U\}$$

$$= \{\lambda \in V^\vee \,;\, \lambda|_U = 0\}$$

Mit anderen Worten: $\Phi(\beta)(U^\perp) = \operatorname{Ker}\left(V^\vee \twoheadrightarrow U^\vee\right)$

$$\underbrace{\lambda \mapsto \lambda|_U}$$

= die durch Abb. zur Inklusion $U \hookrightarrow V$

Insgesamt:

$\Phi(\beta)$ Isom.

$$\dim U^\perp = \dim \Phi(\beta)(U^\perp) = \dim V^\vee - \dim U^\vee$$

$$= \dim V - \dim U$$

Korollar V endlichdim'l K-VR, β nicht-ausg. hermitesche SLF $V \times V \to K$.
$U \subseteq V$ UVR. Dann gilt $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis Es gilt $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ und $\dim U = \dim V - \dim U^\perp$

$$= \dim (U^\perp)^\perp$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

Berechnen Sie das orthogonale Komplement von $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Quiz

Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

Berechnen Sie das orthogonale Komplement von $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

dim $U^\perp = 2$ nach Satz, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ l.u. $\rightsquigarrow$ Basis