Lineare Abbildungen und Matrizen

Übersicht Vorlesungswoche 8

17. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung -- Wo stehen wir?

V, W Vektorräume über dem Körper K

$f : V \to W$ lineare Abbildung

Isomorphismus

Lineare Abbildungen und Basen : V VR mit Basis $v_1, \dots, v_n$, W VR, $w_1, \dots, w_n \in W$

$\longrightarrow$ es ex. genau eine lin. Abb. $f : V \to W$ so dass $f(v_i) = w_i \;\forall\, i = 1, \dots, n$.

Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionsformel

$f : V \to W$, $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$.

Abschnitte 7.1, 7.2 im Skript

Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$

Haben gesehen: $A \in M_{m\times n}(K) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{f}_A\colon K^n \to K^m$.

- Jede lin. Abb. $K^n \to K^m$ hat die Form f_A für eine eind. best. Matrix A.

  In der Tat, ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n, so gilt für jedes $f\colon K^n \to K^m$: $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in K^n$

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = A \cdot x, \quad \text{wobei}$$

  A die Matrix mit Spalten $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ ist, $\quad A \in M_{m\times n}(K)$
  $\overset{\wedge}{} K^m$

Satz 7.26 im Skript

Lineare Abbildungen $\leftrightsquigarrow$ Matrizen, allgemeiner Fall

V, W VR über K, $\qquad$ $\mathcal{B}$ Basis von V, $\quad \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{C}$ Basis von W, $\quad \mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$

$\rightsquigarrow \quad V \xrightarrow[\sim]{c_{\mathcal{B}}} K^n \qquad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$

$W \xrightarrow[\sim]{c_{\mathcal{C}}} K^m \qquad\qquad f \longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

darstellende Matrix
von f bezüglich
der Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Abschnitt 7.3 im Skript

Basiswechsel

$$V \xrightarrow{f} W$$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}' \qquad \mathcal{C}, \mathcal{C}'$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \quad \rightsquigarrow \quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f)$$

Smithsche Normalform

„schwieriger"

$$V \xrightarrow{f} V$$

$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}$

Was ist ‚geschickte' Wahl von $\mathcal{B}$, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ möglichst einfach ist.

Satz 7.31, Korollar 7.33 im Skript

Der Rang einer Matrix

$A \in M_{m\times n}(K)$ mit Spalten $s_1, \dots, s_n$ und Zeilen $z_1, \dots, z_m$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(f_A) = \dim \operatorname{Im}(f_A) = \dim \underbrace{\langle s_1, \dots, s_n \rangle}_{\subseteq K^m}$$ "Spaltenrang von A"

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$x \longmapsto Ax$$
$x = (x_1, \dots, x_n)^t$

LK der Spalten von A mit Koeff. $x_1, \dots, x_n$

Zeilenrang von $A := \dim \underbrace{\langle z_1, \dots, z_m \rangle}_{\subseteq K^n}$.

Theorem Für jede Matrix stimmen Spaltenrang und Zeilenrang.

Abschnitt 7.4 im Skript

Der Dualraum eines Vektorraums (Fortsetzung)

- Duale Basis. $\quad V \qquad\qquad V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$

  V endlich-dimensional $\quad \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}^\vee$ duale Basis zu $\mathcal{B}$

  (mit ebenso vielen Elem wie $\mathcal{B}$)

  Korollar $\quad V$ endlich-dim'l $\Rightarrow \dim V^\vee = \dim V$.

- $V \xrightarrow{f} W$ lin. Abb. $\rightsquigarrow$ duale Abb. $\quad W^\vee \xrightarrow{f^\vee} V^\vee$

  zwischen endl-dim'l VR $\qquad\qquad \mathcal{C}^\vee \qquad \mathcal{B}^\vee$

  mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C} \rightsquigarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \qquad M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^t.$

Abschnitt 7.5 im Skript

Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ und Matrizen
Vorlesungswoche 8

15. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$

Haben gesehen: $A \in M_{m\times n}(K) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{f}_A \colon K^n \to K^m.$ $\qquad f_A \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$

$$x \longmapsto Ax$$

$$m\left[\underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{n}\right. \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix} \in K^m$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Berechnen Sie:

$$\mathbf{f}_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$f_A(e_j) =$ j-te Spalte von A

- Bestimmen Sie eine Matrix A über $\mathbb{Q}$, so dass $\mathbf{f}_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ die Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 2x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ (-1) x + 0 \cdot y \\ 2x + (-1) y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist.

Satz Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$M_{m\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m), \quad A \longmapsto f_A,$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen mit Umkehrabbildung

$$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \longrightarrow M_{m\times n}(K), \quad f \longmapsto M(f)$$

mit $M(f) = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(K)$,

wobei $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^t = f(e_j) \quad (\in K^m)$.

(d.h. die j-te Spalte von $M(f)$ ist der Vektor $f(e_j)$)

$e_1, \dots, e_n \in K^n$ Standardbasis

Beweis Zeigen, dass die Abbildung $A \mapsto f_A$ linear ist, und dass die beiden Abb. $M_{m\times n}(K) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ Umkehrabb. voneinander sind.

(1) Linearität der Abbildung $A \mapsto f_A$:

- seien $A, B \in M_{m\times n}(K)$. zz: $f_{A+B} = f_A + f_B \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$

Für alle $x \in K^n$ gilt

$$f_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax + Bx = f_A(x) + f_B(x).$$

Distributivgesetz für Matrizenprodukt

- seien $A \in M_{m\times n}(K)$, $a \in K$. zz: $f_{aA} = a \cdot f_A$

Für alle $x \in K^n$ gilt: $f_{aA}(x) = (aA)x = a(Ax) = a\, f_A(x)$

(2) Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. zz $M(f_A) = A$.

$$\begin{tikzcd} M_{m\times n}(K) \arrow[r, bend left] & \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Zeige: Für alle $j = 1, \dots, n$ ist j-te Spalte von $M(f_A)$ = j-te Spalte von A.

j-te Spalte von $M(f_A) = f_A(e_j) = A e_j = j$-te Spalte von A.

Definition von $M(\cdot)$

(3) Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$. zz: $f_{M(f)} = f$. $(\in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m))$

Um Gleichheit von zwei linearen Abbildungen zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass sie auf den Vektoren irgendeiner Basis des Definitionsbereichs dieselben Werte haben.

In unserem Fall: zz $f_{M(f)}(e_j) = f(e_j)$ für $j = 1, \dots, n$.

Es gilt $f_{M(f)}(e_j) = M(f)\, e_j =$ j-te Spalte von $M(f)$ $= f(e_j)$.

Bem Die Injektivität und Surjektivität der Abbildung

$$M_{m\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m), \quad A \mapsto f_A,$$

folgt auch direkt aus unserem Satz, dass zu jeder Wahl $w_1, \dots, w_n$ von Elementen $\in K^m$ genau eine lineare Abb. $K^n \xrightarrow{f} K^m$ mit $f(e_j) = w_j$, $j = 1, \dots, n$, existiert.

Verträglichkeit mit Verkettung / Multiplikation

Lemma Seien $f: K^m \to K^\ell$, $g: K^n \to K^m$ lineare Abbildungen und

$$M(f) \in M_{\ell \times m}(K), \quad M(g) \in M_{m \times n}(K)$$

die zugehörigen Matrizen. Dann gilt

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$$

Beweis Hatten schon gesehen $f_A \circ f_B = f_{AB}$ $\left(\text{für } A \in M_{\ell \times m}(K), \; B \in M_{m \times n}(K) \right)$

Also $\underbrace{f_{M(f)}}_{f} \circ \underbrace{f_{M(g)}}_{g} = f_{M(f)M(g)}$, und es folgt

$$M(f \circ g) = M\left(f_{M(f)M(g)}\right) = M(f)M(g).$$

Bem Sehen auch: $f : K^n \to K^n$ Isomorphismus $\iff M(f)$ invertierbar,

$(m=n)$ f_A Isomorphismus $\iff A \in M_n(K)$ invertierbar

Zum Beispiel. f Isom mit Umkehrabb $g : K^n \to K^m$,

dann gilt $M(f)\,M(g) = M(f \circ g) = M(\mathrm{id}_{K^n}) = E_n$.

Lineare Abbildungen $V \to W$ und Matrizen

Vorlesungswoche 8

15. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lineare Abbildungen $\leftrightsquigarrow$ Matrizen, allgemeiner Fall

K Körper

Hatten gesehen
$$M_{m\times n}(K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(K^n, K^m)$$
$$A \longmapsto f_A : K^n \to K^m,\quad x \mapsto Ax$$
$$M(f) \longleftarrow\!\!| \quad f$$

j-te Spalte von $M(f)$ ist $f(e_j)$

$(j = 1, \dots, n)$

$e_1, \dots, e_n \in K^n$ Standardbasis

Nun V, W endl-dim'l VR über K, $n = \dim V$, $m = \dim W$

Seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V bzw. W

$c_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\sim} K^n$, $\quad c_{\mathcal{C}} : W \xrightarrow{\sim} K^m$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & K^n \arrow[l, bend right, "c_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \arrow[d] \\
W \arrow[r, "\sim"] & K^m
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & K^n \arrow[d, "f_A"] \\
W \arrow[r, "\sim"] & K^m \arrow[l, bend left, "c_{\mathcal{C}}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Satz Seien K ein Körper, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K. Sei $n = \dim V$, $m = \dim W$. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W.

Dann sind die Abbildungen

$$
M_{m \times n}(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W), \quad A \longmapsto c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{B}}
$$

und

$$
\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(K), \quad f \longmapsto M(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1})
$$

zueinander inverse VR-Isomorphismen.

<u>Beweis</u> (ähnlich wie im vorherigen Video für Standard-VR)

(1) Die Abbildung $A \mapsto c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{B}}$ ist linear.

- zz: für $A, B \in M_{m\times n}(K)$ gilt $c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_{A+B} \circ c_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_B \circ c_{\mathcal{B}}$

(in $\mathrm{Hom}_K(V,W)$)

Für alle $v \in V$ gilt

$$c_{\mathcal{C}}^{-1}\left(f_{A+B}(c_{\mathcal{B}}(v))\right) = c_{\mathcal{C}}^{-1}\left(f_A(c_{\mathcal{B}}(v)) + f_B(c_{\mathcal{B}}(v))\right) \overset{c_{\mathcal{C}}^{-1}\text{ linear}}{=} c_{\mathcal{C}}^{-1}\left(f_A(c_{\mathcal{B}}(v))\right) + c_{\mathcal{C}}^{-1}\left(f_B(c_{\mathcal{B}}(v))\right)$$

Die Abb. $A \mapsto f_A$ ist linear

- zz: für $a \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$ gilt $c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_{aA} \circ c_{\mathcal{B}} = a \cdot (c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{B}})$

Noch zu zeigen: Die Abbildungen $M_{m\times n}(K) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_K(V,W)$

sind Umkehrabb. voneinander.

(2) zz: für $A \in M_{m\times n}(K)$ gilt $$M\Big(c_{\mathcal{C}} \circ \big(\underbrace{c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{B}}}_{\text{"von links nach rechts"}}\big) \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}\Big) = A$$

In der Tat gilt
$$M\big(\underbrace{c_{\mathcal{C}} \circ (c_{\mathcal{C}}^{-1}}_{\mathrm{id}_{K^m}} \circ f_A \circ \underbrace{c_{\mathcal{B}}) \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}}_{\mathrm{id}_{K^n}}\big) = M(f_A) = A.$$

(3) zz: für $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ gilt $$c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_{M(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1})} \circ c_{\mathcal{B}} = f.$$

Es gilt $$c_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \underbrace{f_{M(\underbrace{c_{\mathcal{E}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}}_{})}}_{} \circ c_{\mathcal{B}} = \underbrace{c_{\mathcal{E}}^{-1} \circ c_{\mathcal{E}}}_{} \circ f \circ \underbrace{c_{\mathcal{B}}^{-1} \circ c_{\mathcal{B}}}_{}$$

$$= f.$$

Mit anderen Worten ...

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{B}} \\ M_{m\times n}(K) & \rightleftarrows & \mathrm{Hom}_K(V,W) \\ M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) & \longleftarrow\!\!\shortmid & f \end{array}$$

Schreibweise: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) := M\left(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}\right)$

Man nennt $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W.

Dann gilt $\quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot c_{\mathcal{B}}(v) = M\left(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}\right) \cdot c_{\mathcal{B}}(v) = \left(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}\right)\left(c_{\mathcal{B}}(v)\right)$

$$= c_{\mathcal{C}}(f(v)) \qquad (v \in V).$$

Insbesondere gilt: $\quad$ j-te Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot e_j = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot c_{\mathcal{B}}(v_j)$

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n), \quad \mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m) \qquad\qquad = c_{\mathcal{C}}(f(v_j))$

Quiz

Es ist $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$

j-te Spalte $= c_{\mathcal{C}}(f(u_j))$, $j=1,2$

Gegeben seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

- $f(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -w_1 + 0 \cdot w_2$
- $f(u_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w_1 + w_2$

Sei $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ ($\subseteq \mathbb{Q}^3$). Dann ist $\mathscr{B}$ eine Basis von U.

Seien $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathscr{C} = (w_1, w_2)$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$.

$\longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Berechnen Sie $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)$ für $f\colon U \to \mathbb{Q}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \end{pmatrix}$.

Lineare Abbildungen und Matrizen
Ein „kommutatives Diagramm“ und ein „toy model“
Vorlesungswoche 8

15. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

„Kommutatives Diagramm"

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "c_{\mathcal{B}}", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & K^n \arrow[d, "\varphi"] \\
W \arrow[r, "\sim", "c_{\mathcal{C}}"'] & K^m
\end{tikzcd}
$$

"Diagramm" heißt kommutativ,

falls $\varphi \circ c_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{C}} \circ f$

$$f \longmapsto c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_K(V, W) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)}_{\text{VR-Isomorphismen}} \xrightarrow{\sim} M_{m\times n}(K)$$

$$c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \varphi \circ c_{\mathcal{B}} \longmapsfrom \varphi$$

$c_{\mathcal{B}}$ Isom.

$$\Big(\Longleftrightarrow \quad \varphi = c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \varphi \circ c_{\mathcal{B}} = f \quad \Big)$$

$c_{\mathcal{C}}$ Isom

Ein „toy model“

Erinnerung $f: V \to V$, V endlich-dimensional

f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv

(genau wie für Abbildungen $f: X \to X$, X endliche Menge).

Seien X, Y endliche Mengen,

$n = \# X$, $m = \# Y$.

$f: X \to Y$

Elemente durchnummerieren:

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$f(x)$	y_2	y_7	y_1	$\ldots$	y_2

oder noch einfacher:

1	2	3	$\ldots$	n
2	7	1	$\ldots$	2

Wählen wir Bijektionen $c_X : X \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$

$c_Y : Y \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Abb}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, m\})$$

$$f \longmapsto c_Y \circ f \circ c_X^{-1}$$

$$c_Y^{-1} \circ \varphi \circ c_X \longleftarrow\!\shortmid \varphi$$

Umkehrabb. voneinander

$\Rightarrow$ Bijektionen

Basiswechsel
Vorlesungswoche 8

16. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Darstellende Matrix einer Verkettung

Situation.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ \| & & \| \\ (v_1, \ldots v_n) & & (w_1, \ldots w_m) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \\ \| \\ (a_{ij})_{i,j} \end{array}$$

"j-te Spalte ist $\boxed{c_{\mathcal{C}}(f(v_j))} \in K^m$"

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

<u>Satz</u> Seien $f: V \to W$, $g: W \to U$ lineare Abb. zwischen endlich-dimensionalen K-VR, und seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ eine Basis von V, W bzw. U. Dann gilt

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f)$$

<u>Beweis</u>

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = M(c_{\mathcal{D}} \circ g \circ c_{\mathcal{C}}^{-1}) \, M(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1})$$

$$= M(c_{\mathcal{D}} \circ g \circ \underbrace{c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ c_{\mathcal{C}}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}) = M(c_{\mathcal{D}} \circ (g \circ f) \circ c_{\mathcal{B}}^{-1})$$

$$\| $$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f).$$

Darstellende Matrix eines Isomorphismus

Korollar Seien V, W VR über K derselben Dimension n und seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Basen von V bzw. W und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ Isomorphismus} \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \text{ invertierbar}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_n(K)$$

$$\boxed{\text{In diesem Fall: } M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^{-1} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})}$$

Beweis '$\Longrightarrow$': Wenn f eine Umkehrabb. f^{-1} besitzt, dann gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\, M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(id) = E_n$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] \\ W \arrow[u, bend right, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "c_{\mathcal{B}}", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & K^n \arrow[d, "f_A"] \\ W \arrow[r, "\sim", "c_{\mathcal{C}}"'] & K^n \arrow[u, bend right, "f_{A^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

'$\Longleftarrow$': Ist $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ invertierbar, dann hat $f = c_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathcal{C}}$ die Umkehrabb. $c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f_{A^{-1}} \circ c_{\mathcal{B}}$.

Basiswechsel

<u>Korollar</u> Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. zwischen endlich-dimensionalen K-VR. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W. Dann gilt:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V).$$

<u>Beweis</u> $\underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'}(\underbrace{\mathrm{id}_W \circ f}_{\overset{\shortparallel}{f}}) \, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f).$

Quiz

Gegeben seien die Basen $\mathscr{B} = \left(\overset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$ sowie $\mathscr{C} = \left(\overset{c_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{c_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right)$ von $\mathbb{Q}^2$ sowie die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ y - 3x \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$ Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)$, einerseits direkt und andererseits mit dem vorherigen Korollar.

<u>direkt</u> $f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -c_1 - c_2$, $\quad f(b_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} c_1 - c_2$.

<u>alternativ</u> $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f) = \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathscr{C}}(\mathrm{id})}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)}_{= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M^{\mathscr{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id})}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\left[M^{\mathcal{E}}_{\mathscr{C}} = \left(M^{\mathscr{C}}_{\mathcal{E}} \right)^{-1} \right]$

Basiswechselmatrizen

Die Matrix $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ heißt auch Basiswechselmatrix.

Schreibweise: $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} := M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ $(\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von $V)$

$$\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C},\mathcal{C}'}{W}$$

<u>Zusammenfassung</u>

- $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$

- $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar, $\left(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$

- Die j-te Spalte von $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ ist $c_{\mathcal{B}}(b_j')$ (wobei $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$)

  Insbes: Ist $\mathcal{E}$ Standardbasis von K^n, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine weitere Basis, dann gilt: j-te Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ ist b_j.

Die Smith-sche Normalform und ein Beispiel zum Basiswechsel Vorlesungswoche 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Basiswechselmatrizen

V ein K-VR mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

$\rightsquigarrow \quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V), \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \left(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\right)^{-1}$

Ist $A \in M_n(K)$ invertierbar $(n = \dim V)$, $\mathcal{B}$ Basis von V, denn existiert eine eind. bestimmte Basis $\mathcal{B}'$ von V mit $A = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$, nämlich, mit $A = (a_{ij})_{i,j}$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' := (b_1', \dots, b_n')$

wobei $b_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$

(denn mit $A^{-1} = (a_{ij}')_{i,j}$ gilt dann

$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}' b_i'$ $\rightsquigarrow$ $b_1', \dots, b_n'$ ES von V, also eine Basis)

Smith-sche Normalform

Frage: Gegeben $f : V \to W$ Homomorphismus endl-dim'l VR, was ist eine möglichst einfache Form der Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$, wenn $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ geeignet gewählt werden?

<u>Satz</u> Seien V, W endl-dim'l K-VR, $n = \dim V$, $m = \dim W$, $f : V \to W$ lineare Abb.

Dann existieren Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W, so dass

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\quad}_{r} & \underbrace{\qquad\quad}_{n-r} \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}]\; r \\ ]\; m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{array} & \end{array}.$$

Dabei gilt $r = \mathrm{rg}(f)$.

<u>Beweis</u> Wir suchen Basen $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ von W,

so dass
$$f(b_j) = \begin{cases} c_j & j \leq r \\ 0 & j > r \end{cases}.$$

Sei $U \leq V$ ein Komplement von $\mathrm{Ker}(f)$, $r := \dim(U)$,

sei $b_1, \ldots, b_r$ eine Basis von U, $b_{r+1}, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$.

Dann bildet $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V.

Sei $c_j := f(b_j)$ für $j = 1, \ldots, r$.

noch zz: $c_1, \ldots, c_r$ linear unabh
(in dem Fall: ergänze zu Basis $c_1, \ldots, c_m$ von W)

Weil für die Einschränkung $f|_U : U \to W$

gilt $\mathrm{Ker}(f|_U) = \mathrm{Ker}(f) \cap U = 0$, ist $f_{|U}$ injektiv, und $\mathrm{Im}(f_{|U}) = \mathrm{Im}(f)$. $V = U \oplus \mathrm{Ker}(f)$

Folglich ist $f_{|U} : U \to \mathrm{Im}(f)$ ein Isomorphismus.

Daher ist mit $b_1, \ldots, b_r$ auch $c_1, \ldots, c_r$ linear unabhängig

und $\underset{r}{\underset{\parallel}{\dim U}} = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$.

Quiz

$\mathcal{E}_n$ Std-Basis von K^n
$\mathcal{E}_m$ — " — K^m

Übersetzen Sie das Ergebnis in die folgende Aussage über Matrizen:

Ist $A \in M_{m\times n}(K)$ irgendeine Matrix, so existieren invertierbare Matrizen $S \in M_m(K)$ und $T \in M_n(K)$, so dass

$$SAT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $r = \operatorname{rg}(\mathbf{f}_A)$. $= \dim \operatorname{Im}(f_A) = \dim \operatorname{Im}(A)$.

Wende Satz an auf $f_A : K^n \to K^m$ $\rightsquigarrow$ es ex. Basen $\mathcal{B}$ von K^n, $\mathcal{C}$ von K^m mit $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt $A = M(f_A) = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(f_A)$

und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f_A) = \underbrace{M^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{C}}}_{=:S} \cdot M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(f_A) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n}}_{=:T} = S \cdot A \cdot T.$

Basiswechsel für Endomorphismen

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & V \\ \mathcal{B} & & \cancel{\mathcal{C}} \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

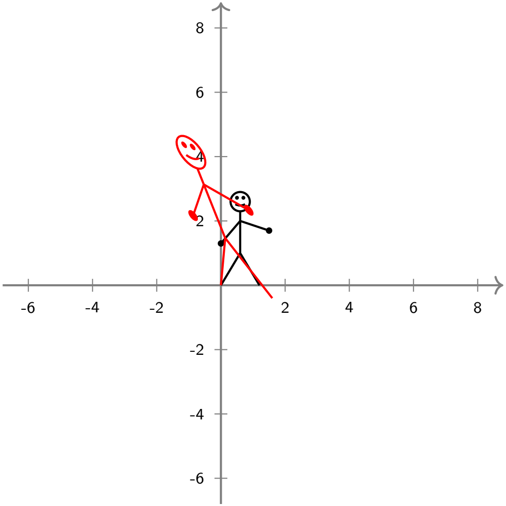
(Schwierige) Frage: Gegeben Endomorphismus f eines endl-dim'l K-VR V, was ist eine möglichst einfache Form für $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ (bei "geschickter Wahl" von $\mathcal{B}$)?

beide Male dieselbe Basis

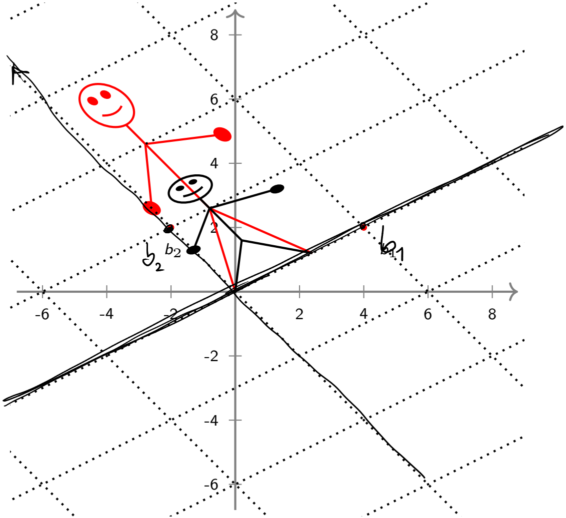
Bsp $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow f = f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)}_{= A} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



8
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6
8



8
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6
8
b_2
b_2
b_1
b_1

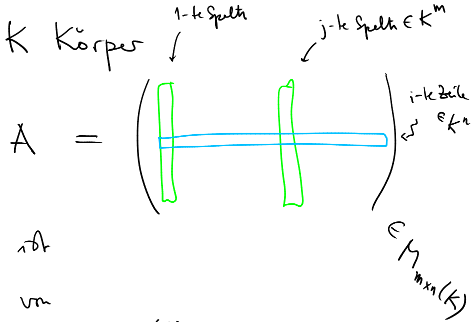
Der Rang einer Matrix
Vorlesungswoche 8

15. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition: (Spalten-)Rang, Zeilenrang



Def Sei $A \in M_{m\times n}(K)$.

(1) Der Rang (oder: Spaltenrang) von A ist die Dimension des UVR von K^m, der von den Spalten von A erzeugt wird. Schreibweise $rg(A)$

(2) Der Zeilenrang von A ist die Dimension des UVR von K^n, der erzeugt wird von den Zeilen von A.

Bem Der Spaltenrang von A ist gleich $rg(f_A)$ $\left(:= \dim \mathrm{Im}(f_A)\right)$, denn der von den Spalten von A erzeugte UVR ist genau $\mathrm{Im}(f_A)$ $\left(f_A(x) = Ax = \text{LK der Spalten von } A\right)$

Quiz

Für A in RZSF ist $\operatorname{rg} A = \text{Zeilenrang}(A) =$ Anzahl der führenden Einsen

- Spalten mit führenden Einsen bilden Basis des von den Spalten erz. UVR
- Nicht-Null-Zeilen von A sind lin. unabh.

Bestimmen Sie den Spaltenrang der folgenden Matrizen (über $\mathbb{Q}$):

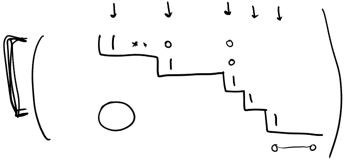
$\boxed{Ax = 0 \text{ eind. lösbar} \rightarrow \text{Spalten von } A \text{ l.u.}}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \end{array} \in M_3(\mathbb{Q}), \qquad A \in M_n(K) \text{ invertierbar}, \qquad A \in M_{m\times n}(K) \text{ in RZSF}.$$

offenbar: $\operatorname{rg}(A) > 1$

Weil $s_1 + s_2 = s_3$, ist $\operatorname{rg}(A) = 2$.

$\operatorname{rg}(A) = n$



Bestimmen Sie den Zeilenrang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}), \qquad A \in M_n(K) \text{ invertierbar}, \qquad A \in M_{m\times n}(K) \text{ in RZSF}.$$

$\text{zeilenrg}(A) > 1$

... Ergebnis: Zeilenrang $= 2$.

$\text{Zeilenrg}(A) = n$

- RZSF von A hat keine Nullzeile $\rightarrow$ Zeilen l.u.
- $\text{Zeilenrg}(A) = \operatorname{rg}(A^t)$, und A^t ebenfalls invertierbar

Zeilenrang=Spaltenrang

Theorem Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Dann stimmen der Spaltenrang und der Zeilenrang von A überein.

Beweis Für eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform stimmen Spalten- und Zeilenrang überein.

$\rightsquigarrow$ gzz: weder der Spaltenrang noch der Zeilenrang verändern sich, wenn eine Matrix durch eine elementare Zeilenumformung verändert wird.

- Zeilenrang verändert sich nicht durch elem. ZUmf: Geht A' aus A durch eine elem. Zeilenumf. hervor, dann sind die Unterräume, die von den Zeilen von A bzw. von den Zeilen von A' erzeugt werden, gleich. (vgl. Übungsaufgabe 6.2).

Zeilenrang=Spaltenrang

$f_A : K^n \to K^m$

- Spaltenrang verändert sich nicht durch elem. Zeilenumf.

  In der Tat gilt $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(f_A) = n - \dim \operatorname{Ker}(f_A)$

  Dimensionsformel für linear Abb.

  und $\operatorname{Ker}(f_A) = \operatorname{Ker}(A) =$ Lösungsmenge des homog LGS $Ax=0$

  verändert sich nicht, wenn A durch elem. Zeilenumformungen verändert wird.

Quiz

Sei K ein Körper, $a = (a_1, \ldots, a_n)^t$, $b = (b_1, \ldots, b_n)^t \in K^n$. Zeigen Sie: a und b sind genau dann linear unabhängig, wenn $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ für mindestens ein Paar i, j, $1 \leq i, j \leq n$.

Zeilenrang = Spaltenrang

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ l.u.} \iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = 2 \iff \exists\, i,j : \left\langle \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Dim. 2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, i,j : a_i b_j - a_j b_i \neq 0 \iff \exists\, i,j : \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \text{ invertierbar}$$

Kriterium für Invertierbarkeit von 2x2-Matrizen.

Lemma (1) Seien $f: V \to W$ eine lineare Abb. zwischen endl.-dim'l K-VR und seien $c: W \to W'$, $c': V' \to V$ Isomorphismen.

Dann gilt $\operatorname{rg}(c \circ f \circ c') = \operatorname{rg}(f)$.

(2) Seien f wie in (1) und $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V bzw. W.

Dann gilt $\operatorname{rg} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \operatorname{rg} f$

(3) Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ und seien $S \in M_m(K)$, $T \in M_n(K)$ invertierbare Matrizen. Dann gilt $\operatorname{rg} SAT = \operatorname{rg} A$.

Beweis zu (1) Haben $V' \xrightarrow{c'} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{c} W'$. Dann gilt

$$\operatorname{Im}(c \circ f \circ c') = c\Big(f\big(c'(V')\big)\Big) \underset{c' \text{ surjektiv}}{=} c(\operatorname{Im}(f))$$

und c induziert einen Isomorphismus $\mathrm{Im}(f) \longrightarrow c(\mathrm{Im}(f))$
$w \longmapsto c(w)$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim c(\mathrm{Im}(f))$$
$$= \mathrm{rg}(c \circ f \circ c').$$

(2) Erinnerung: $\mathrm{rg}\, f_A = \mathrm{rg}\, A$. In der Situation des Lemmas:

$$\mathrm{rg}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)) = \mathrm{rg}\left(M\left(c_{\mathcal{C}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1}\right)\right) = \mathrm{rg}(\underbrace{c_{\mathcal{C}}}_{\text{Isom}} \circ f \circ \underbrace{c_{\mathcal{B}}^{-1}}_{})$$
$$\underset{(1)}{=} \mathrm{rg}(f).$$

Standardbasis.

(3) Wir betrachten A als die Matrix $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(f_A)$, $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_n}$, $T = M^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{C}}$
für geeignete Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ von K^n, K^m $\rightsquigarrow$ $SAT = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f_A) \rightsquigarrow \mathrm{rg}\, SAT =$
$\mathrm{rg}\, f_A = \mathrm{rg}\, A.$

Der Dualraum eines Vektorraums

Fortsetzung

Vorlesungswoche 8

16. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Der Dualraum von K^n

Es ist $(K^n)^\vee = \mathrm{Hom}_K(K^n, K) \xrightarrow{\sim} K^n$

(natürlich als Zeilenvektor)

$$\lambda \longmapsto \left(\lambda(e_i)\right)^t_{i=1,\dots,n}$$

(Spezialfall des Isom. $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \cong M_{m\times n}(K)$ für $m=1$)

Die duale Basis

$\mathrm{Hom}(K^n, K) \xrightarrow{\sim} K^n$

$\lambda_i \longmapsto e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)^t$

V ein K-VR mit Basis $b_1, \dots, b_n$

Dann bilden $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in V^\vee$ mit $\lambda_i(b_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

eine Basis von $V^\vee$, die sogenannte $\quad i = 1, \dots, n$

duale Basis zur Basis $b_1, \dots, b_n$. $\quad j = 1, \dots n$

Begründung. Die Wahl der Basis $\mathcal{B}$ gibt Isom. $V \xrightarrow[\sim]{c_{\mathcal{B}}} K^n$.

$\rightsquigarrow \quad K^n \cong (K^n)^\vee \xrightarrow{\sim} V^\vee$ und das Bild von $e_i \in K^n$

unter dieser Abb. ist λ_i.

Korollar. Ist V ein endl-dimensionaler K-VR, so gilt $\dim(V^\vee) = \dim(V)$.

Quiz

$$e_1 = -\tfrac{1}{2} b_2, \qquad e_2 = \tfrac{1}{2} b_1 + \tfrac{1}{4} b_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Basis $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}}_{b_2}$ von $\mathbb{Q}^2$. Bestimmen Sie die duale Basis.

von $(\mathbb{Q}^2)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q})$

$\boxed{e_1^\vee, e_2^\vee}$

Die duale Basis ist geg. durch

$$\lambda_1 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \lambda_1\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 1, \quad \lambda_1\left(\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right) = 0, \quad \text{also } \lambda_1 = f_{(0 \;\; \frac{1}{2})} = \tfrac{1}{2} e_2^\vee$$

$$\lambda_2 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \lambda_2\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 0, \quad \text{also } \lambda_2 = f_{(\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{4})} = \tfrac{1}{2} e_1^\vee + \tfrac{1}{4} e_2^\vee$$

$$\lambda_2\left(\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right) = 1$$

duale Basis zur Standardbasis e_1, e_2

Der Rang der dualen Abbildung

<u>Satz</u> Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Sei $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ die duale Abbildung.

Dann $\operatorname{rg}(f^\vee) = \operatorname{rg}(f)$.

<u>Beweis</u> Wir schreiben f als Verkettung

"surjektiv" "injektiv"

$$\begin{array}{ccccc} V & \twoheadrightarrow & \operatorname{Im}(f) & \hookrightarrow & W \\ v & \longmapsto & f(v) & & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $f^\vee$ ist Verkettung $W^\vee \longrightarrow \operatorname{Im}(f)^\vee \longrightarrow V^\vee$

duale Abb. zu inj. Abb., also surjektiv

duale Abb. zu surj. Abb., also injektiv.

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im}(f^\vee) \cong \operatorname{Im}(f)^\vee$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rg}(f^\vee) = \dim(\operatorname{Im}(f)^\vee) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$.

Der Doppeldualraum

Sei V ein K-VR, $\quad V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ ← K-VR

Wir können dann den Dualraum $(V^\vee)^\vee = \mathrm{Hom}_K(V^\vee, K)$ bilden,

den sogenannten Doppeldualraum von V, Bezeichnung: $V^{\vee\vee}$.

Man hat Abbildung $\quad V \longrightarrow V^{\vee\vee}, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} V^\vee \longrightarrow K \\ \lambda \longmapsto \lambda(v) \end{pmatrix}$,

die "kanonische Abbildung von V in seinen Doppeldualraum", ist eine <u>lineare</u> Abbildung.

$$V \longrightarrow V^{\vee\vee}, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} V^{\vee} \longrightarrow K \\ \lambda \longmapsto \lambda(v) \end{pmatrix}$$

<u>Korollar</u> Sei V ein <u>endlich-dimensionaler</u> K-VR. Dann ist die kanon. Abb. $V \longrightarrow V^{\vee\vee}$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u> Die Abb. $V \longrightarrow V^{\vee\vee}$ ist injektiv. gzz: der Kern ist trivial

Angenommen $v \in V$, $v \neq 0$, hat Bild 0 in $V^{\vee\vee}$.

- Weil $v \neq 0$, können wir v zu Basis von V ergänzen, und finden dann $\lambda : V \longrightarrow K$ mit $\lambda(v) = 1$.
- Dass v in $V^{\vee\vee}$ den Wert 0 hat, bedeutet $\lambda(v) = 0$ für alle $\lambda \in V^{\vee}$

$\lightning$

Weil $\dim V^{\vee\vee} = \dim V^{\vee} = \dim V$, folgt, dass $V \longrightarrow V^{\vee\vee}$ ein Isomorphismus ist.

Der Dualraum eines Vektorraums
Die Matrix der dualen Abbildung
Vorlesungswoche 8

17. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die darstellende Matrix der dualen Abbildung

$\mu \mapsto \mu \circ f$

$f : V \to W \quad \rightsquigarrow \quad$ duale Abbildung $\quad f^\vee : W^\vee \to V^\vee$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed] & W \arrow[d, "\mu"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Basen $\left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ \shortparallel & \shortparallel \\ (b_1, \dots, b_n) & (c_1, \dots, c_n) \end{array} \right.$

duale Basen zu $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ $\left[\begin{array}{cc} \mathcal{C}^\vee & \mathcal{B}^\vee \\ \shortparallel & \shortparallel \\ (\mu_1, \dots, \mu_m) & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array} \right.$

$\rightsquigarrow \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{m \times n}(K) \qquad\qquad M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee) \in M_{n \times m}(K)$

<u>Satz</u> Mit diesen Notationen gilt: $\quad M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^t$.

<u>Beweis</u> Wir schreiben $\quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee) = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$.

Dann gilt:

i-te Spalte von $M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee) = c_{\mathcal{B}^\vee}(f^\vee(\mu_i))$ $\qquad c_{\mathcal{B}^\vee} : V^\vee \to K^n$

$\parallel$

$(b_{1i}, \dots, b_{ni})^t \quad (\in K^n) \qquad = c_{\mathcal{B}^\vee}(\underbrace{\mu_i \circ f}_{\in V^\vee})$

Das bedeutet $\quad \mu_i \circ f = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \lambda_j \quad (\in V^\vee)$

Wir setzen dort b_k ein: $\quad \mu_i(f(b_k)) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \underbrace{\lambda_j(b_k)}_{= \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}} = b_{ki}$

Andererseits ist $\quad f(b_k) = \sum_{l=1}^{m} a_{lk} c_l \quad (\in W)$,

also $\quad \mu_i(f(b_k)) = \sum_{l} a_{lk} \underbrace{\mu_i(c_l)}_{} = a_{ik}$

$$a_{ik} = b_{ki}$$

$\forall\ i = 1, \dots, m$
$ k = 1, \dots, n$

Noch einmal: Zeilenrang = Spaltenrang

Sei $A \in M_{m \times n}(K)$, $\quad rg(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$ der Spaltenrang

$(= \dim \operatorname{Im}(f_A))$

<u>Satz</u> Es gilt $rg(A) = rg(A^t)$.

<u>Beweis</u> $$rg(A) = rg(\underbrace{f_A}_{K^n \to K^m}) = rg(\underbrace{(f_A)^\vee}_{(K^m)^\vee \to (K^n)^\vee}) = rg\left(M^{\mathcal{E}_m^\vee}_{\mathcal{E}_n^\vee}(f_A^\vee)\right) = rg(A^t).$$

Stdbasen $\mathcal{E}_n \quad \mathcal{E}_m$

$$M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(f_A) = A \qquad M^{\mathcal{E}_m^\vee}_{\mathcal{E}_n^\vee}(f_A^\vee) = A^t$$

Quiz

Wir betrachten die Basis $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}}$ von $\mathbb{Q}^2$. Bestimmen Sie die duale Basis. $\mathcal{B}^\vee$

in Termen der dualen Basis $\mathcal{E}^\vee$

der Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$

$$\Big(\mathcal{E}^\vee = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}, \quad e_i \mapsto \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i=2 \end{cases} \quad \lambda_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} \quad e_i \mapsto \begin{cases} 0 & i=1 \\ 1 & i=2 \end{cases} \Big)$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $M^{\mathcal{B}^\vee}_{\mathcal{E}^\vee}$

$$M^{\mathcal{B}^\vee}_{\mathcal{E}^\vee} = M^{\mathcal{B}^\vee}_{\mathcal{E}^\vee}\left(\mathrm{id}_{(\mathbb{Q}^2)^\vee}\right) = M^{\mathcal{B}^\vee}_{\mathcal{E}^\vee}\left(\left(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^2}\right)^\vee\right) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^2}\right)^t = \left(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}\right)^t = \left(\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1}\right)^t$$