Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Ein bisschen Geometrie
Vorlesungswoche 8

23. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Der Abstand von zwei Punkten in $\mathbb{R}^n$

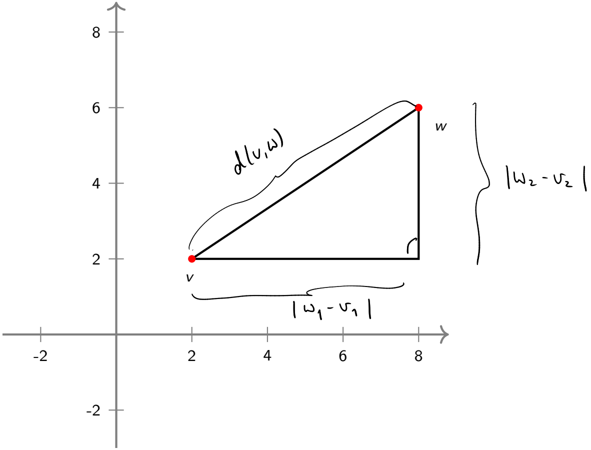
Seien $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$, $w = (w_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$

Dann heißt $d(v,w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (w_i - v_i)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ der <u>Abstand</u> von v zu w.

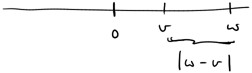
Einfache Eigenschaften.

- $v = w \iff d(v,w) = 0$
- $d(v,w) = d(w,v)$

Der Abstand von zwei Punkten in $\mathbb{R}^2$



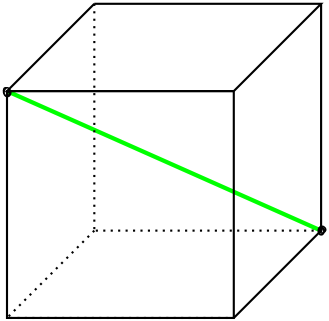
$\mathbb{R}^1$ $\quad d(v,w) = \sqrt{(w-v)^2} = |w-v|$



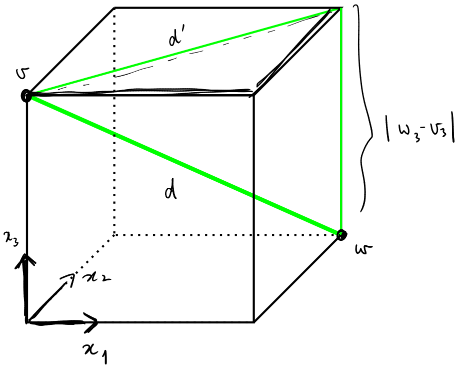
Satz des Pythagoras

$$d(v,w) = \sqrt{|w_1-v_1|^2 + |w_2-v_2|^2}$$

Der Abstand von zwei Punkten in $\mathbb{R}^3$



Der Abstand von zwei Punkten in $\mathbb{R}^3$



$$d = d(v,w)$$

$$d^2 = \underbrace{(d')^2}_{= (w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2} + (w_3 - v_3)^2$$

$$\rightsquigarrow \quad d = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (w_i - v_i)^2}$$

Abstandserhaltende Abbildungen

Def. Eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>abstandserhaltend</u>, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$: $\quad d(f(v), f(w)) = d(v,w)$.

Bem Jede abstandserhaltende lineare Abb. ist ein Isomorphismus,

denn $\quad f(v) = 0 \Rightarrow 0 = d(f(v), 0) = d(f(v), f(0)) = d(v, 0) \Rightarrow v = 0.$

(also f injektiver Endomorphismus $\Rightarrow$ Isomorphismus).

Satz Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine abstandserh. lineare Abbildung. Dann gilt

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

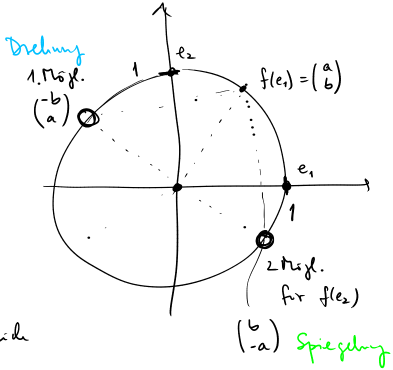
Begr. Wir schreiben $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := f(e_1)$

Dann gilt $d(f(e_1), 0) = d(e_1, 0) = 1$,

das bedeutet $a^2 + b^2 = 1$.

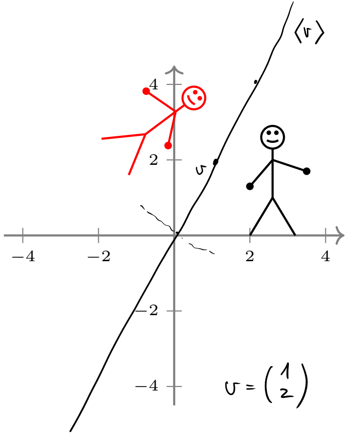
Ferner muss $d(f(e_2), 0) = 1$

$d(f(e_2), f(e_1)) = d(e_1, e_2) = \sqrt{2}$



Die beiden Möglichkeiten für $f(e_2)$, die diese beiden Bedingungen erfüllen, sind $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

Spiegelungen $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ an einer Ursprungsgeraden $\langle v \rangle$



$\rightsquigarrow$ • $f(v) = v$

• es existiert $v' \in \mathbb{R}^2$ mit $f(v') = -v'$.

Diese beiden Eigenschaften sind für Abb. der Form $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$,

$$a^2 + b^2 = 1$$

erfüllt (und für $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ nicht).

$$\left.\begin{aligned} Ax &= x \\ Ax &= -x \end{aligned}\right\}$$ haben jeweils einen 1-dim'l Lösungsraum

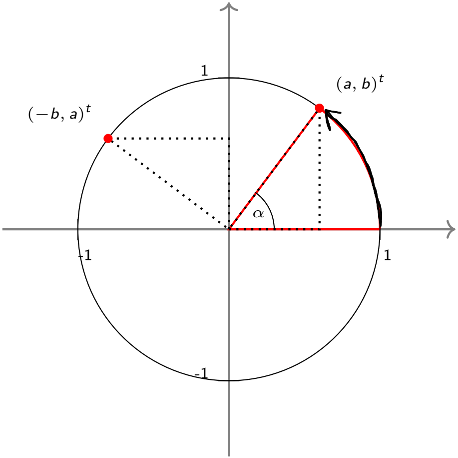
Drehungen $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

Charakterisierung: abstandserhaltend, keine Spiegelung $\longleftrightarrow$ $M(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a^2+b^2=1$

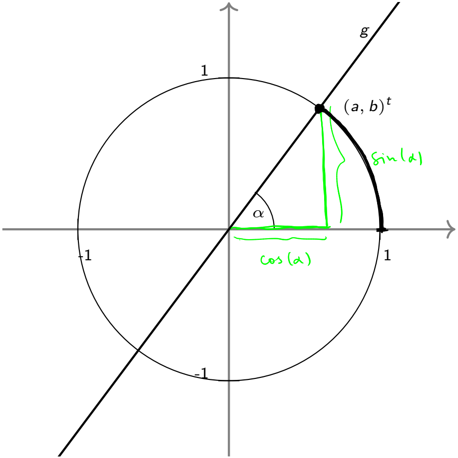
„Drehmatrizen"

äquivalent: f abstandserhaltend und es existiert eine (abstandserh.) lineare Abb g mit $f = g \circ g$

Drehungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Die trigonometrischen Funktionen sin, cos



$a = \cos \alpha$

$b = \sin \alpha$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}$$

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

- α zwischen $0°$ und $360°$
- α zwischen 0 und 2π

  $\in \mathbb{R}$

Selber ausprobieren:

`https://math.ug/applets/spiegelungen.html`

`https://math.ug/applets/drehungen.html`

Drehungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Frage Was ist eine gute allgemeine Definition einer Drehung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$?

Sicherlich: • abstandserhaltend

[• "keine Spiegelung"] • es existiert $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f = g \circ g$.

Eigenschaften: Jede Drehung hat eine "Drehachse", d.h. es gibt Gerade $\langle v \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, die fixiert wird.

Die Verkettung von zwei Drehungen ist eine Drehung.