Lineare Abbildungen

Übersicht Vorlesungswoche 7

10. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung -- Wo stehen wir?

V ein K-Vektorraum

$V, \quad + : V \times V \to V$

$\quad\;\; \cdot : K \times V \to V$

Struktur von V: Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum besitzt eine Basis.

Dimension $\quad \dim V$

Dimension und Untervektorräume

Kapitel 6 im Skript

Lineare Abbildungen

K ein Körper, V, W Vektorräume über K.

Eine Abbildung $f: V \longrightarrow W$ heißt <u>linear</u>,

falls

- für alle $v, v' \in V$ gilt: $\underbrace{f(v+v')}_{\text{in } V} = \underbrace{f(v)+f(v')}_{\text{in } W}$

- für alle $a \in K$, $v \in V$ gilt $f(av) = a f(v)$.

Abschnitt 7.1 im Skript

Isomorphismen

= lineare Abb $f: V \to W$, s.d. eine lineare Umkehrabb. ex.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f \text{ linear}"] & W \arrow[l, bend left, "g \text{ linear}"] \end{tikzcd}$$

K-VR

K-VR

$$g \circ f = \mathrm{id}_V$$

$$f \circ g = \mathrm{id}_W$$

Abschnitt 7.1 im Skript

Die Koordinatenabbildung

V ein K-VR, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{c_{\mathcal{B}}} & K^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ v & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_n)^t \\ \| & & \\ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i & & a_i \in K \end{array}$$

Koordinatenabbildung, ein Isomorphismus von VR

Abschnitt 7.1, Def. 7.18 im Skript

Kern und Bild einer linearen Abbildung $f: V \to W$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V ;\ f(v) = 0 \} \subseteq V \quad \text{UVR}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) ;\ v \in V \} \subseteq W \quad \text{UVR}$$

Abschnitt 7.2 im Skript

Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Theorem

Seien V, W Vektorräume über K, sei V endlich-dimensional und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathsf{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Theorem 7.23 im Skript

Der Dualraum eines Vektorraums

K Körper, V ein K-VR

$$V^\vee \; (= V^*) = \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

Menge aller linearen Abb. $V \to K$,
ist Vektorraum
(ein UVR von $\mathrm{Abb}(V, K)$)

Abschnitt 7.5 im Skript

Lineare Abbildungen
Definition und einfache Beispiele
Vorlesungswoche 7

7. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lineare Abbildungen

Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K.

Def. Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt <u>linear</u> (oder Vektorraum-Homomorphismus), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) für alle $v, v' \in V$: $\quad f(v+v') = f(v) + f(v')$,

(b) für alle $a \in K$, $v \in V$: $\quad f(av) = a\, f(v)$.

<u>Bem.</u> Ist $f: V \to W$ linear, so gilt $f(\underbrace{0}_{\text{in } V}) = \underbrace{0}_{\text{in } W}$. (Wende (b) an mit $a = 0$ und $v = 0$.)

Insbes.: Eine Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto mx + b$ ($\rightsquigarrow$ Funktionsgraph ist Gerade), ist eine lineare Abb. von $\mathbb{R}$-VR genau dann, wenn $b = 0$.

Beispiele

Seien V, W VR über K.

- Die Abbildung $V \to W$, $v \mapsto 0$, ist linear. "Nullabbildung"
- Die Identitätsabb. $V \to V$, $v \mapsto v$, ist linear.

  Ist $U \subseteq V$ ein UVR, dann ist die Inklusionsabbildung

  $U \to V$, $u \mapsto u$, linear.

- Sind $f: U \to V$ und $g: V \to W$ Homomorphismen, so ist auch die Verkettung $g \circ f: U \to W$ ein VR-Homomorphismus (kleine Rechnung)

Eine lineare Abb. $V \to V$ nennt man auch <u>Endomorphismus</u>.

Quiz: Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$f((-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$

$(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\|$

$$K=\mathbb{Q},\quad f:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}^2,\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x^2+y^2\\x^2-y^2\end{pmatrix}.$$

← nicht linear

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\quad f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq$

$$K=\mathbb{Q},\quad f:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}^3,\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\y-x\end{pmatrix}.$$

linear

$v=\left(\begin{matrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+3x\end{matrix}\right)\in V$

$D(v)=(\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x+3)$

- $K=\mathbb{R}$, V der Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D\colon V\to V$, $f\mapsto f'$.

ist linear,

Ableitungsregeln:

$(f+g)'=f'+g'$

m.a.W. $D(f+g)=D(f)+D(g)$

$(af)'=a\cdot f'$

$$K=\begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{cases},\quad f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad a+bi\mapsto a-bi\ (a,b\in\mathbb{R}).$$

ist $\mathbb{R}$-VR-Homomorphismus,

$\boxed{\begin{matrix}f(1)=1\\ f(i)=-i\neq i\cdot f(1)\end{matrix}}$ → aber kein $\mathbb{C}$-VR-Homomorphismus,

Geometrische Interpretation

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear $\iff$

- $f(0) = 0$

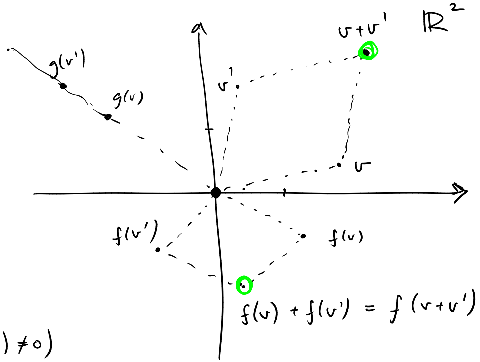
(a) • Für jedes Parallelogramm mit Ecken $0, v, v', v+v'$ bilden $0 = f(0), f(v), f(v'), f(v+v')$ wieder die 4 Ecken eines Parallelogramms (möglicherweise entartet).

(b) • Jede Ursprungsgerade $\langle v \rangle$ $(v \neq 0)$ wird auf eine Ursprungsgerade (nämlich $\langle f(v) \rangle$) abgebildet (falls $f(v) \neq 0$) und ist dort eine "Streckung".

$f: V \to W$ linear:

(a) $\forall v, v'$: $f(v+v') = f(v) + f(v')$

(b) $\forall a \in K, v \in V$: $f(av) = a f(v)$.



Geometrische Beispiele

- Ist $A \in M_{m \times n}(K)$, so ist die Abb. $f_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$

  linear: • $A(x+y) = Ax + Ay$
  • $A \cdot (ax) = a \cdot Ax$

- Spiegelungen an Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^2$, Drehungen um den Ursprung von $\mathbb{R}^2$, Streckungen, Scherungen sind lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

https://math.ug/applets/lineare-abbildungen-1.html

Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

K Körper

V, W VR über K

Wir schreiben $\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{ f : V \to W \, ; \, f$ lineare Abb $\}$

$\underset{\text{UVR}}{\subseteq} \mathrm{Abb}(V, W)$

↑ alle Abbildungen

Dann ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein K-Vektorraum

mit

Addition $\quad (f+g) : V \to W, \quad v \mapsto f(v) + g(v)$ $\qquad f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$

Skalarmult. $\quad (af) : V \to W, \quad v \mapsto a \cdot f(v)$ $\qquad a \in K, \; f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$

lineare Abb.

Isomorphismen
Vorlesungswoche 7

8. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition Isomorphismus

K Körper, V, W Vektorräume über K

<u>Def.</u> Eine lineare Abbildung $f: V \to W$ heißt <u>Isomorphismus</u>, wenn eine lineare Abbildung $g: W \to V$, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_V, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_W.$$

Man nennt g den Umkehrisomorphismus von f und schreibt dafür $f^{-1}: W \to V$ (<u>Bem</u> Wenn g existiert, so ist g durch f eindeutig bestimmt, und ist ebenfalls Isom.)

<u>Sprechweisen.</u>

- Wir sagen, VR V und W seien isomorph, wenn ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} W$ existiert, $V \cong W$
- Ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V$ heißt auch Automorphismus.

Bijektive lineare Abbildungen sind Isomorphismen

__Lemma__ Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ es ex. lineare Umkehrabb. g

(ii) f ist eine bijektive Abbildung $\Leftrightarrow$ es ex. Umkehrabb. g

__Beweis__

__(i) $\Rightarrow$ (ii)__ Klar, denn jede Abbildung, die eine Umkehrabb. besitzt, ist bijektiv.

__(ii) $\Rightarrow$ (i)__ Sei f bijektiv und sei g die (eind. bestimmte) Umkehrabbildung von f.

zz: g linear. Seien $w_1, w_2 \in W$, $\underbrace{v_1 = g(w_1),\ v_2 = g(w_2)}$ (also $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$)

$$g(w_1 + w_2) = g\big(\underbrace{f(v_1) + f(v_2)}\big) \underset{f \text{ linear}}{=} \underbrace{g\big(f}(v_1 + v_2)\big) = v_1 + v_2 = g(w_1) + g(w_2).$$

Bijektive lineare Abbildungen sind Isomorphismen

Ähnlich für $a \in K$, $w \in W$, $v = g(w)$ (also $w = f(v)$):

$$g(aw) = g(a f(v)) = g(f(av)) = (g \circ f)(av) = av = a \cdot g(w).$$

Quiz: Welche der folgenden Abbildungen sind Isomorphismen?

$K = \mathbb{Q}$, $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$

Ist Isomorphismus

$K = \mathbb{Q}$, $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$

Kein Isomorphismus

(z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ nicht injektiv)

K ein Körper, $a \in K$, $f : K \to K$, $x \mapsto ax$

— falls $a = 0$: kein Isomorphismus.

falls $a \neq 0$: Isomorphismus mit Umkehrabbildung $x \mapsto a^{-1} \cdot x$.

Isomorphismen „transportieren“ Vektorraumeigenschaften

Lemma Sei $f: V \to W$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

(1) Ist $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V, dann ist $(f(v_i))_{i\in I}$ ein ES von W.

(2) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie in V, dann ist $(f(v_i))_{i\in I}$ linear unabh. in W.

(3) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, dann ist $(f(v_i))_{i\in I}$ eine Basis von W.

(4) Falls V endlich erzeugt ist, so ist auch W endlich erzeugt und $\underline{\underline{\dim V = \dim W}}$.

Beweis Klar: $(1)+(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$.

zu (1) Sei $f^{-1}: W \to V$ die Umkehrabbildung von f, und sei $w \in W$.

Schreibe $f^{-1}(w) = \sum_{i\in I} a_i v_i$ (nur endl. viele $a_i \neq 0$). Dann $w = f(f^{-1}(w)) = f\left(\sum_i a_i v_i\right) = \sum a_i f(v_i)$.

Lineare Abbildungen und Basen

Vorlesungswoche 7

9. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Eine lineare Abbildung ist durch die Werte auf Basisvektoren bestimmt

__Satz__ Seien V, W Vektorräume über K, sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V, und seien $w_1, \ldots, w_n \in W$.

Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ so dass für alle $i = 1, \ldots n$ gilt $f(b_i) = w_i$.

__Beweis__ __Eindeutigkeit__ Ist $v \in V$, etwa $v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $a_i \in K$, dann muss

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i .$$

__Existenz__ Wir definieren für $v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$: $\quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$

Dies definiert eine Abbildung $V \longrightarrow W$, weil jedes v eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der b_i hat.

Außerdem gilt für $i = 1, \ldots, n$: $\quad b_i = 0 \cdot b_1 + \ldots + 1 \cdot b_i + 0 \cdot b_{i+1} + \ldots + 0 \, b_n$,

also $\quad f(b_i) = w_i$.

bzz: f ist linear. $\quad$ Seien $v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $\quad v' = \sum_{i=1}^{n} a_i' b_i$.

Dann gilt
$$f(v + v') = f\left(\sum a_i b_i + \sum a_i' b_i\right) = f\left(\sum (a_i + a_i') b_i\right)$$

$$= \sum (a_i + a_i') w_i = \sum a_i w_i + \sum a_i' w_i = f(v) + f(v')$$

Ähnlich: $a \in K$, $v \in V$: $\quad f(av) = a f(v)$.

Quiz: Existiert eine lineare Abbildung so dass …? ⊛ Sei g die eind. best. lineare Abb. $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, s.d. $g(v_1) = w_1$, $g(v_3) = w_3$

Es gilt $v_2 = v_1 - v_3$

v_1, v_3 Basis von $\mathbb{Q}^2$

① Existiert $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ mit

$$\underbrace{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \mapsto \underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}, \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \mapsto \underset{w_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}, \quad \underbrace{\underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}} \mapsto \underset{w_3}{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}} \quad ?$$

①

$g(v_2) = g(v_1 - v_3)$

$= g(v_1) - g(v_3)$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Abb mit den gewünschten Eigenschaften existiert nicht

Existiert $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad ?$$

② Betrachte wieder g wie in ⊛

Dann gilt $g(v_2) = w_2$, also können wir $f = g$ setzen.

Basiswahl als Wahl eines Koordinatensystems

Seien V ein K-VR und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V.

Erhalten Isomorphismen

$$K^n \xrightarrow{\sim} V \qquad (a_1, \ldots, a_n)^t \mapsto \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$V \xrightarrow{\sim} K^n$$ eind. best. lineare Abb. mit $b_i \mapsto e_i$, $i = 1, \ldots, n$

Standardbasisvektoren

(d.h. $v = \sum a_i b_i \mapsto (a_1, \ldots, a_n)^t$

Basiswahl als Wahl eines Koordinatensystems

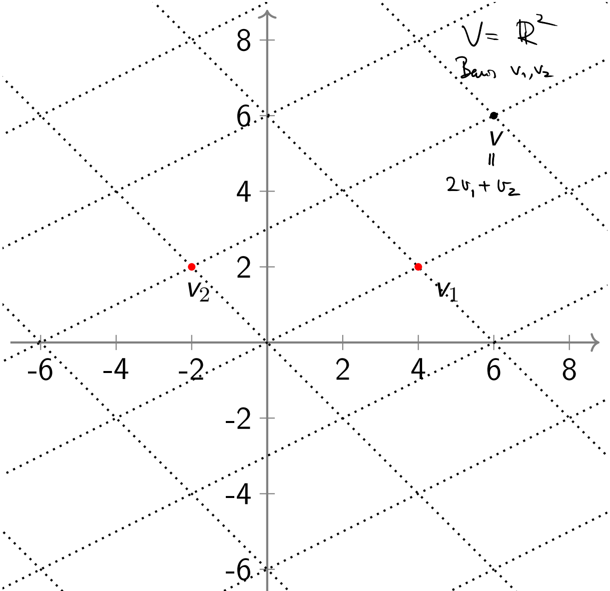
Auch natürlich, falls $V = K^n$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine andere Basis als die Standardbasis ist. "Wechsel des Koordinatensystems"

$\rightsquigarrow$ Automorphismus

$$e_i \longmapsto b_i$$

$$K^n \rightleftarrows K^n$$

$$e_i \longleftarrow\!\!\mapsfrom b_i$$



Die Koordinatenabbildung

Sei V ein K-VR mit Basis $(b_1, \ldots, b_n) =: \mathcal{B}$

Dann heißt der Isomorphismus $V \to K^n$ mit $b_i \mapsto e_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$

$$v = \sum a_i b_i \mapsto (a_1, \ldots, a_n)^t$$

die Koordinatenabbildung von V bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, wir schreiben

$$c_{\mathcal{B}} : V \to K.$$

Für $v \in V$ heißt $c_{\mathcal{B}}(v)$ der Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Dimension und Isomorphie

<u>Korollar</u> Seien V, W endlich erzeugte K-VR. Dann sind äquivalent:

(i) $V \cong W$ (ii) $\dim V = \dim W$.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) siehe 'oben'.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $n = \dim V = \dim W$. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V, W

$\rightsquigarrow$ $c_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\sim} K^n$, $c_{\mathcal{C}} : W \xrightarrow{\sim} K^n$

$\longrightarrow$ $c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ c_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow W$ Isomorphismus (mit Umkehrhomom. $c_{\mathcal{B}}^{-1} \circ c_{\mathcal{C}}$).

Kern und Bild

Vorlesungswoche 7

9. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen

Der Kern $\mathrm{Ker}(f)$ von f ist definiert als

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V ;\ f(v) = 0 \} = f^{-1}(\{0\}) \subseteq V$$

und das Bild $\mathrm{Im}(f)$ von f ist $\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) ;\ v \in V \} \subseteq W$.

- Dann ist $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$ ein Untervektorraum, und $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$ ein UVR.
- Ist $A \in M_{m \times n}(K)$, $f_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$, die zugeh. Abb., so gilt

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \mathrm{Ker}(A) = \{ x \in K^n ;\ Ax = 0 \}, \quad \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Im}(A).$$

Quiz

Sei $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^5$, $W = \mathbb{Q}^3$,

$\mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^3$ $\qquad A \in M_{3\times 5}(\mathbb{Q})$

$$f_A = f : V \to W, \quad x \mapsto Ax$$

$\mathrm{Im}(f) = \langle w_1, \ldots, w_5 \rangle$

mit

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{5} x_i w_i$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & - & - & w_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Wähle Basis innerhalb des geg. ES $w_1, \ldots, w_5$

  $A \xrightarrow{\text{ZUF}} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\rightsquigarrow$ w_1, w_2 Basis von $\mathrm{Im}(f)$

- Spaltenumformungen (Hausaufgabe 6.2)

Wie würden Sie eine Basis von Ker(f) und wie eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$ berechnen?

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A)$ = Lösungsmenge des durch A geg. homog LGS.

Quiz

endlich erzeugter

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Existiert eine lineare Abbildung $f \colon V' \to V$ mit $\mathrm{Im}(f) = U$?

ja, denn $U = \mathrm{Im}(f)$ für $f : U \to V$, $u \mapsto u$

Existiert eine lineare Abbildung $g \colon V \to V'$ mit $\mathrm{Ker}(g) = U$?

ja

Injektivität $\Longleftrightarrow$ trivialer Kern

<u>Lemma</u> Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-VR.

Dann sind äquivalent: (i) f ist injektiv

(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \underset{\text{Nullvektorraum}}{0} \quad (\subseteq V)$

<u>Beweis</u> <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u> Weil $f(0) = 0$, gilt $0 \in \mathrm{Ker}(f)$, und wegen der Injektivität von f kann $\mathrm{Ker}(f)$ keine Elemente $\neq 0$ haben.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Wollen zeigen: $v = v'$.

Aus $f(v) = f(v')$ folgt $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$, also $v - v' \in \underset{0}{\underset{\parallel}{\mathrm{Ker}(f)}}$,

d.h. $v - v' = 0$, also $v = v'$.

Terminologie: Monomorphismen, Epimorphismen

Eine injektive lineare Abb. $f: V \to W$ nennt man auch Monomorphismus.

Eine surjektive lineare Abb. $f: V \to W$ nennt man auch Epimorphismus.

Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Vorlesungswoche 7

9. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Seien K ein Körper, V, W Vektorräume $/K$. Sei V endlich-dimensional.

<u>Theorem</u> Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ endlich erzeugt und

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

<u>Sprechweise</u> Die Zahl $\dim(\mathrm{Im}(f))$ nennt man auch den <u>Rang</u> der linearen Abbildung f, in Zeichen $\mathrm{rg}(f) := \dim(\mathrm{Im}(f))$.

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq V$ ein Komplementärraum zum UVR $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$, d.h. $\mathrm{Ker}(f) \oplus U = V$.

<u>Beh</u> $f|_U : U \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$, $u \mapsto f(u)$, ist ein Isomorphismus.

Wenn wir diese Behauptung beweisen können, dann folgt der Satz, denn es folgt dann, dass $\dim U = \dim \mathrm{Im}(f)$. Weil U, $\ker(f)$ Komplementärräume in V sind, gilt auch $\dim \ker(f) + \dim U = \dim V$.

<u>Beweis der Behauptung</u> • Weil $f_{|U}$ linear ist, zzz: $f_{|U}$ bijektiv.

$$\begin{array}{c} U \subseteq V \\ \downarrow f \\ W \end{array}$$

• $f_{|U}$ injektiv: Falls $u \in U$ mit $f_{|U}(u) = 0$, dann gilt $u \in U \cap \ker(f) = \{0\}$, d.h. $u = 0$.
Also gilt $\ker(f_{|U}) = 0$, also $f_{|U}$ injektiv.

• $f_{|U}$ surjektiv: Sei $w \in \mathrm{Im}(f)$. zz: es ex. $u \in U$ mit $f_{|U}(u) = w$.
Jedenfalls ex. $v \in V$ mit $f(v) = w$ (weil $w \in \mathrm{Im}(f)$). Schreibe $v = u' + u$, mit $u' \in \ker(f)$, $u \in U$. Dann gilt $w = f(v) = f(u') + f(u) = f(u) = f_{|U}(u)$. / $V = \ker(f) \oplus U$

$u' \in \ker(f)$

Also ist $f_{|U}$ surjektiv.

Korollar: Homomorphismen zwischen Vektorräumen derselben Dimension

Korollar Seien V, W endlich-dimensionale K-VR mit $\dim V = \dim W$.

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. | Dann äquivalent:

(i) f ist Isomorphismus,

(ii) f ist injektiv,

(iii) f ist surjektiv.

Beweis Sei $d = \dim V = \dim W$, $d' = \dim \mathrm{Ker}(f)$, $d'' = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Dimensionsformel $\Rightarrow$ $d = d' + d''$ $(*)$

Andererseits gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = 0$ $\Leftrightarrow$ $d' = 0$

f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = W$ $\Leftrightarrow$ $d'' = d$

$(*)$

Quiz: Zusammenhang zu linearen Gleichungssystem

Sei $A \in M_{m\times n}(K)$ und $f\colon K^n \to K^m$ die zugehörige Abbildung $x \mapsto Ax$.
Versuchen Sie, die Dimensionsformel und das Korollar in Termen von Matrizen/linearen Gleichungssystemen zu interpretieren.

- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A) =$ Lösungsmenge von $Ax = 0$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A) = \{ b \in K^m ;\ \text{LGS } Ax = b \text{ lösbar} \}$

Dimensionsformel: $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = n$ (Anzahl der Spalten von A)

Im quad. Fall, d.h. $m = n$: f bij $\Leftrightarrow$ f inj. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = 0$ $\Leftrightarrow$ f surjektiv

$\longleftrightarrow$ "Äquivalent"

- $\forall b \in K^n$: $Ax = b$ eind. lösbar
- $\forall b \in K^n$: $Ax = b$ höchstens eine Lösg $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ hat nur triviale Lösg
- $\forall b \in K^n$: $Ax = b$ lösbar

Der Dualraum eines Vektorraums

Vorlesungswoche 7

9. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition: Dualraum

Sei V ein K-Vektorraum.

VR aller linearen Abb. $V \to K$

Def Wir nennen den K-Vektorraum $V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ den Dualraum von V.

Vektorraumstruktur auf $V^\vee$:

$\lambda, \mu \in V^\vee$, d.h. $\lambda, \mu : V \to K$, $a \in K$

- $(\lambda + \mu) : V \to K$, $v \mapsto \lambda(v) + \mu(v)$
- $(a\lambda) : V \to K$, $v \mapsto a \cdot \lambda(v)$

Die Elemente von $V^\vee$ nennt man auch Linearformen.

Oft wird der Dualraum auch mit V^* bezeichnet.

Quiz: Beispiele für Elemente im Dualraum

immer: Nullabbildung $\begin{matrix} V \longrightarrow K \\ v \longmapsto 0 \end{matrix}$

Sei $V = K^n$. Finden Sie Elemente im Dualraum $V^\vee$.

gesucht: $K^n \longrightarrow K$, Möglichkeit: $f_A : K^n \longrightarrow K$ für $A = M_{1\times n}(K)$, $A = (a_1 \cdots a_n)$

$$(x_1, \ldots, x_n)^t \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Sei $K = \mathbb{R}$, V der Vektorraum aller Polynomfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Finden Sie Elemente im Dualraum $V^\vee$.

$$V = \left\{ p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \text{es ex. } n \in \mathbb{N},\ c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \right\}$$

- $V \xrightarrow{ev_a} \mathbb{R}$, $p \longmapsto p(a)$ $(a \in \mathbb{R})$
- $V \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longmapsto p'(a)$ $(a \in \mathbb{R})$
- $V \to \mathbb{R}$, $p \longmapsto \int_0^1 p(x)\,dx$.

Die duale Abbildung einer linearen Abbildung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abb. zwischen K-VR.

Wir nennen $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$, $\lambda \mapsto \lambda \circ f$,

die zu f duale Abbildung.

- $\lambda \circ f : V \to K$ ist als Verkettung linearer Abb. selbst linear, also $\lambda \circ f \in V^\vee$.

- $f^\vee$ ist eine lineare Abb.: Für $\lambda, \mu \in W^\vee$ ist

$$f^\vee(\lambda+\mu) = (\lambda+\mu) \circ f : v \mapsto (\lambda+\mu)\big(f(v)\big) = \lambda(f(v)) + \mu(f(v))$$

$$= \underline{f^\vee(\lambda)(v) + f^\vee(\mu)(v)}$$

Also gilt $f^\vee(\lambda+\mu) = f^\vee(\lambda) + f^\vee(\mu)$

$\lambda \in W^\vee$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\lambda"] & K \\ V \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\; ? \; f^\vee(\lambda+\mu) = f^\vee(\lambda) + f^\vee(\mu) \;}$$

ähnlich, $a \in K, \lambda \in W^\vee$:
$f^\vee(a\lambda) = a\, f^\vee(\lambda)$

- Das Bilden der dualen Abbildung ist verträglich mit der Verkettung:

Seien $f: U \to V$, $g: V \to W$ lineare Abbildungen $\rightsquigarrow$ $g \circ f : U \to W$

Dann gilt $$f^\vee \circ g^\vee = (g \circ f)^\vee$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right, "g\circ f"'] & U^\vee \\
V \arrow[d, "g"] & V^\vee \arrow[u, "f^\vee"'] \\
W & W^\vee \arrow[u, "g^\vee"'] \arrow[uu, bend right]
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> für $\lambda \in W^\vee$.

Dann gilt $$(f^\vee \circ g^\vee)(\lambda) = f^\vee(g^\vee(\lambda))$$
$$= f^\vee(\lambda \circ g) = (\lambda \circ g) \circ f$$
$$= \lambda \circ (g \circ f) = (g \circ f)^\vee(\lambda).$$

- Konsequenz: $f: V \to W$ Isom. mit Umkehrabb. $g: W \to V$ $\Rightarrow$ $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ ist Isom. mit Umkehrabb. $g^\vee: V^\vee \to W^\vee$

(denn $g^\vee \circ f^\vee = (f \circ g)^\vee = (\mathrm{id}_W)^\vee = \mathrm{id}_{W^\vee}$, $f^\vee \circ g^\vee = \mathrm{id}_{V^\vee}$)

Eigenschaften der dualen Abbildung

Vorlesungswoche 7

10. Dezember 2020

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Injektivität/Surjektivität von f bzw. $f^\vee$

<u>Satz</u>. Seien V, W endlich-dimensionale K-VR, $f: V \to W$ eine lin. Abb.

Sei $f^\vee: W^\vee \to V^\vee$ die zu f duale Abbildung.

(1) f injektiv $\iff$ $f^\vee$ surjektiv

(2) f surjektiv $\iff$ $f^\vee$ injektiv.

<u>Beweis</u> von (1) '$\Rightarrow$'. Sei f injektiv, $U = \mathrm{Im}(f) \subseteq W$. Dann ist $\begin{array}{l} V \to U \\ v \mapsto f(v) \end{array}$ bijektiv, also ein Isomorphismus.

Sei $g: U \to V$ der Umkehrhomomorphismus.

Sei $U' \subseteq W$ ein Komplement von U.

zz: $f^\vee: W^\vee \to V^\vee$ surjektiv. Sei $\lambda \in V^\vee$

$\overset{?}{\|}$

$f^\vee(\mu)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & W \arrow[dl, dashed, "\mu ?"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Definiere $\mu \in W^\vee$ durch

$$\mu : \begin{aligned} W = U \oplus U' &\longrightarrow K \\ u + u' &\longmapsto \lambda(g(u)) \end{aligned}$$

$(u \in U, u' \in U')$

Beh $f^\vee(\mu) = \lambda$.

Bew Sei $v \in V$.

Dann gilt $\underline{f^\vee(\mu)}(v) = \mu(f(v)) = \lambda(g(\underbrace{f(v)}_{f(v) \in \mathrm{Im}(f) = U}))$

$= \lambda(v)$

'$\Longleftarrow$'. Sei $f^\vee$ surjektiv. z.z.: f injektiv.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & 0 \\ V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & W \arrow[dl, dashed] \\ K & \end{tikzcd}$$

Angenommen, es existiert $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \{0\}$.

Ergänze v zu einer Basis $v, v_2, \dots, v_n$ von V und definiere $\lambda : V \to K$ durch $\boxed{\lambda(v) = 1}$, $\lambda(v_i) = 0$, $i = 2, \dots, n$.

Dann kann λ nicht die Form $\mu \circ f$ für $\mu \in W^\vee$ haben, also nicht im Bild von $f^\vee$ liegen — ein Widerspruch zur Surjektivität.