Basissätze
Übersicht Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung: Wo stehen wir

V ein K-Vektorraum $\quad v_1, \dots, v_n \in V$

Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \; ; \; a_1, \dots, a_n \in K \}$$

Menge aller LK von $v_1, \dots, v_n$

- Lineare Hülle
- Erzeugendensystem : $v_1, \dots, v_n$ ES von $V \Leftrightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$
- Linear unabhängig : $v_1, \dots, v_n$ l.u. $\Leftrightarrow$ für alle $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ gilt $a_1 = \dots = a_n = 0$
- Basis

$v_1, \dots, v_n$ Basis von V

$\Leftrightarrow$ jedes $v \in V$ lässt sich für genau eine Wahl von $a_1, \dots, a_n \in K$ in der Form $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = v$ darstellen.

$\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ linear unabh. + ES

Abschnitte 6.2, 6.3 im Skript

Existenz von Basen

Satz Sei V ein endlich erzeugter K-VR. Dann besitzt V eine Basis aus endlich vielen Elementen.

Basisergänzungssatz Sind $M \subseteq V$ linear unabh. und $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem, und gilt $M \subseteq E$, dann existiert eine Basis B von V mit $M \subseteq B \subseteq E$.

Abschnitt 6.4 im Skript

Die Dimension eines Vektorraums

Sei V ein endlich erzeugter K-VR.

Dann haben je zwei Basen von V <u>die gleiche Anzahl</u> an Elementen.

Diese Anzahl nennen wir die <u>Dimension</u> von V.

Abschnitt 6.4 im Skript

Dimension von Untervektorräumen

V ein endlich erzeugter K-VR

- Ist $U \subseteq V$ ein UVR, dann ist U ebenfalls endlich erzeugt und $\dim U \leq \dim V$.

- Dimensionsformel für Untervektorräume $U, W \subseteq V$

$$\dim U + W + \dim U \cap W = \dim U + \dim W .$$

Existenz von Basen
Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Charakterisierung von Basen

<u>Satz</u> Seien K ein Körper und V ein K-VR. Sei $B \subseteq V$ eine Teilmenge.

Dann sind äquivalent:

(i) B ist eine Basis von V

(ii) B ist linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V

(iii) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V
(d.h.: B ist ein ES von V und für alle $B' \subseteq B$ mit $B' \neq B$ gilt: B' kein ES von V)

(iv) B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V,
(d.h. B ist linear unabhängig und ist $B \subseteq B' \subseteq V$ und gilt $B \neq B'$, so ist B' nicht linear unabhängig).

Charakterisierung von Basen

Beweis (i) ⇒ (ii) l.u., weil sich der Nullvektor eind. als LK von Elem. von B darstellen lässt, Erzeugendensystem: klar nach Definition.

(ii) ⇒ (iii) zz: Minimalität. Sei $v \in B$. Angenommen, $B \setminus \{v\}$ wäre ein ES von V.

Dann existieren Elem. $v_1, \ldots, v_n \in B \setminus \{v\}$, $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$.
(paarw. versch.)

Dann gilt aber $v - a_1 v_1 - \ldots - a_n v_n = 0$, und das steht im Widerspruch dazu, dass B linear unabhängig ist.

(iii) ⇒ (iv) Zeige zuerst: B ist linear unabhängig. Sonst existieren $v_1, \ldots, v_n \in B$, $a_1, \ldots, a_n \in K$
paarw. versch.

min ES max. l.u.

mit $a_1 \neq 0$ und $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$, also $v_1 = -\frac{1}{a_1}(a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n)$,

das bedeutet $v_1 \in \langle B \setminus \{v_1\} \rangle$, also ist $B \setminus \{v_1\}$ auch ein ES von V

— Widerspruch zur Minimalität.

Charakterisierung von Basen

zeige noch: B maximal linear unabhängig

Sei $v \in V \setminus B$. Wir zeigen: $B \cup \{v\}$ ist linear abhängig.

Da B ein ES von V ist, existieren $v_1, \ldots, v_n \in B$, $a_1, \ldots, a_n \in K$

mit $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, also $v - a_1 v_1 - \ldots - a_n v_n = 0$. ✓

max l.u. $\downarrow$ B Basis

$(iv) \Rightarrow (i)$. zz: jeder Vektor aus V lässt sich eindeutig als LK von Elem von B darstellen.

- Sei $v \in V$. Dann ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig, es existieren $v_1, \ldots, v_n \in B$, $a, a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a v + a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$, nicht alle Koeff sind $= 0$.

  Es kann nicht $a = 0$ sein, weil B linear unabhängig ist.

  Dann folgt: $v = -\frac{1}{a}(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) \in \langle B \rangle$.

- Eindeutigkeit der Darstellung: Angenommen für $v \in V$ existieren verschiedene Darstellungen

  $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m$ mit $v_i, w_i \in B$, $a_i, b_i \in K$.

Charakterisierung von Basen

Dann ist die Differenz $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n - b_1 w_1 - \ldots - b_m w_m = 0$ eine LK, die den Nullvektor darstellt, und die nicht-trivial ist, weil die Darstellungen als verschieden angenommen wurden. Das steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit.

Zusammenfassung

Basis $\iff$ l.u. + ES $\iff$ minimales ES $\iff$ maximale l.-u. Teilmenge

Quiz

Sei $V = \mathbb{Q}^4$. Wählen Sie aus dem gegebenen Erzeugendensystem des Untervektorraums U eine Basis von U aus:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sei $V = \mathbb{Q}^3$. Ergänzen Sie die folgende linear unabhängige Familie zu einer Basis von V:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{z.B.} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elem. Zeilen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Spalten bilden Basis.

Spalten von $A \in M_n(K)$ bilden Basis von K^n

$\iff$ $\forall\, b \in K^n$ ist das LGS zu $(A|b)$ eindeutig lösbar

$\iff$ A hat RZSF E_n

Quiz

Sei $V = \mathbb{Q}^4$. Wählen Sie aus dem gegebenen Erzeugendensystem des Untervektorraums U eine Basis von U aus:

$$U = \left\langle \overset{\substack{u_1\\ \|}}{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}}, \overset{\substack{u_2\\ \|}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{\substack{u_3\\ \|}}{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\3\end{pmatrix}}, \overset{\substack{u_4\\ \|}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

Suchen minimales ES

Frage: Welche der Vektoren kann man weglassen, ohne zu verändern, welcher UVR erzeugt wird

$\hookrightarrow$ welche der Vektoren sind LK von anderen Elementen des ES?

Beob. Ist A eine Matrix und ist die j-te Spalte von A eine LK der anderen Spalten, so hat jede Matrix, die aus A durch elem. Zeilenumf. entsteht, dieselbe Eigenschaft.

Hier: betrachte

ist LK von vorderen beiden Spalten

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \implies u_1, u_2, u_4 \text{ ist Basis von } U.$$

Existenz von Basen in endlich erzeugten Vektorräumen

Theorem

Seien K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann existiert eine Basis von V.

Beweis: Sei $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem, das nur endlich viele Elem. hat.
Ist E minimal, so handelt es sich um eine Basis.
Andernfalls existiert $v \in E$, s.d. $E \setminus \{v\}$ ebenfalls ein Erzeugendensystem ist.
In endlich vielen können wir dann E durch Entfernen von Elementen zu einem minimalen ES, also einer Basis, verkleinern.

Bemerkung: Ist $V = \{0\}$ der Nullvektorraum. Dann ist $\emptyset$ eine Basis.
("leere LK" = "leere Summe in V" $= 0$).

Der Austauschsatz
Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Der Austauschsatz

<u>Satz</u> Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.
Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis und
sei $w_1, \dots, w_i \in V$ eine linear unabhängige Familie.
Dann existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $\# I = i$,
so dass $w_1, \dots w_i, \; v_j, j \notin I$ eine Basis ist.

<u>Bem</u>
<-- neue Basis hat wieder n Elemente
und $i \leq n$.

mit anderen Worten: Nach Umnummerieren der v_j (falls nötig)
ist $w_1, \dots w_i, v_{i+1}, \dots v_n$ eine Basis von V.

<u>Beweis</u> durch vollständige Induktion nach i. <u>IA</u> $i = 0$ ✓ $(i=1 \; \dots)$
<u>IS $i > 0$</u> Weil $w_1, \dots w_i$ lin. unabh. ist, ist auch die Familie $w_1, \dots, w_{i-1}$ l. u.,
nach Induktionsvoraussetzung können wir also die Elem. $v_1, \dots v_n$ Umnummerieren, so dass

Satz 6.37 im Skript

Der Austauschsatz

$w_1, \dots, w_{i-1}, v_i, \dots v_n$ eine Basis von V bilden. (*)

Insbes. ist dies ein ES, also existieren $a_1, \dots a_n \in K$ mit $w_i = a_1 w_1 + \dots + a_{i-1} w_{i-1} + \underline{a_i v_i + \dots + a_n v_n}$.

Weil $w_1, \dots w_i$ linear unabh. ist, gilt $w_i \notin \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle$. Also existiert $j \geq i$ mit $a_j \neq 0$.

Dann können wir nach Umnummerieren annehmen, dass $a_i \neq 0$.

Dann gilt $$v_i = -\frac{1}{a_i}\left(a_1 w_1 + \dots + a_{i-1} w_{i-1} - w_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n\right),$$

also $v_i \in \langle w_1, \dots w_i, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$. Es folgt $\langle w_1, \dots w_i, v_{i+1}, \dots v_n \rangle = V$.

<u>bzz</u>: $w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Begründung: genügt zu zeigen, dass
① $w_1, \dots, w_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n$ linear unabh.
② $w_i \notin \langle w_1, \dots w_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$

(benutze Lemma 6.34)

① klar wegen (*)

② andernfalls wäre $v_i \in \langle w_1, \dots w_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$ im Widerspruch zu (*).

Satz 6.37 im Skript

Quiz

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Sei $V = \mathbb{Q}^3$, e_1, e_2, e_3 die Standardbasis, und

$$w = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Finden Sie $i, j \in \{1, 2, 3\}$, so dass e_i, e_j, w eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ (oder $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$)

Der Basisergänzungssatz

Satz Seien K ein Körper, V ein K-VR,

- $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge
- $E \subseteq V$ ein endliches Erzeugendensystem.

Es gelte $M \subseteq E$. Dann existiert eine Basis B von V mit $M \subseteq B \subseteq E$.

l.u.

„Wir können M durch Elemente aus E zu einer Basis ergänzen."

ES

Beweis Wir können eine Basis $B' \subseteq E$ von V finden, indem wir gegebenenfalls geeignete Elemente aus E weglassen.

Nach dem Austauschsatz können wir, falls nötig, Elemente aus B' so ersetzen, dass wir eine Basis B mit $M \subseteq B \subseteq E$.

Insbesondere: Ist V ein endlich erzeugter K-VR, so lässt sich jede lin. unabh. Teilmenge M zu einer Basis ergänzen.

Satz 6.39 im Skript

Quiz

Sei $V = \mathbb{Q}^4$. Ergänzen Sie die linear unabhängige Familie

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Standardbasis}}$$

durch Vektoren aus der Standardbasis zu einer Basis von $\mathbb{Q}^4$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&2&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elem Zeilenumf}} \begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&1\\0&0&1&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&-1&0\end{pmatrix}$$

diese 4 Spalten "holen"

RZSF $E_4 \rightsquigarrow$ Basis von $\mathbb{Q}^4$

Die Dimension eines Vektorraums
Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung: Der Austauschsatz

Satz

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis, $w_1, \dots, w_i \in V$ eine linear unabhängige Familie. Dann existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\#I = i$, so dass die n Elemente $w_1, \dots, w_i, v_j, j \notin I$, eine Basis von V bilden.

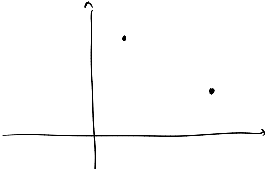
<u>Korollar</u> Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$, und sei $w_1, \dots, w_i$ eine linear unabh. Familie von Elementen von V.

Dann gilt $i \leq n$.

Insbesondere folgt: Sind sowohl $v_1, \dots, v_n$ als auch $w_1, \dots, w_i$ Basen von V, so gilt $i = n$.

Je zwei Basen eines endlich erzeugten K-VR haben gleich viele Elemente.

Definition der Dimension



Def. Seien K ein Körper und V ein endl. erzeugter K-VR. Die Anzahl der Elemente in einer Basis von V heißt die <u>Dimension</u> $\dim V$ von V.

(schreibe auch $\dim_K V$)

(Kann $\dim V$ auf nicht-endl.-erzeugte K-VR verallgemeinern.)

Beispiele / Quiz

K Körper

- K^n $\qquad \dim K^n = n$ $\qquad$ (K^n hat Basis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

- $M_{m\times n}(K)$ $\qquad \dim M_{m\times n}(K) = mn$

  $M_{m\times n}$ hat Basis, die besteht aus den mn Matrizen, bei denen genau ein Eintrag 1 ist, alle anderen 0.

$$\begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \\ & j \end{array}$$

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $\qquad \mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

  $\uparrow$ als $\mathbb{R}$-VR

  Basis: $\begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix} \begin{bmatrix} \hat{=} (1,0) \\ \hat{=} (0,1) \end{bmatrix}$

  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

- $\dim 0 = 0$.

  $\uparrow$

  Nullvektorraum

Beispiel: Dimension der Lösungsmenge eines homogenen LGS

K Körper $\quad A \in M_{m \times n}(K)$, $\quad \mathbb{L} = \{ x \in K^n ; \ Ax = 0 \} \subseteq K^n$ UVR

Lösungsmenge des homog LGS zu A $\quad (= \operatorname{Ker}(A))$

Dann gilt $\quad \dim \mathbb{L} = n - r$, $\quad$ wobei r = Anzahl der führenden Einsen in ZSF von A,

denn $\mathbb{L}$ besitzt eine Basis mit $n-r$ Elementen $\quad$ ($n-r$ = Anzahl der frei wählbaren Unbestimmten)

Satz Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein K-VR mit $\dim V = n$.

(1) Ist $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine lin. unabh. Familie, so ist $v_1 \ldots v_n$ eine Basis von V.

(2) Ist $v_1, \ldots v_n \in V$ ein Erzeugendensystem, dann ist $v_1, \ldots v_n$ eine Basis von V.

Beweis (1) Jede lin. unabh. Familie lässt sich zu einer Basis ergänzen. Aber eine Basis kann nicht mehr als n Elemente haben.

(2) Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis, und eine Basis von V kann nicht weniger als n Elemente haben.

Bem Man kann den Dimensionsbegriff noch direkter auf der Theorie der LGS aufbauen. (Ergänzung 6.46).

Dimension und Untervektorräume
Vorlesungswoche 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dimension eines Untervektorraums

<u>Satz</u> Sei V ein <u>endlich erzeugter</u> K-VR, $U \subseteq V$ Untervektorraum.

(1) Dann ist U endlich erzeugt, und $\dim U \leq \dim V$.

(2) Gilt $\dim U = \dim V$, so folgt $U = V$.

<u>Beweis</u> zu (1). Falls U nicht endlich erzeugt ist, dann hat U keine endliche Basis. Das bedeutet: jede endliche linear unabhängige Familie von Elem aus U lässt sich zu einer linear unabh. Familie (durch Hinzufügen eines Elements) vergrößern (denn wäre sie maximal, so wäre es eine Basis). Dann existiert sogar eine l.u. Familie von Elem aus U mit $\dim V + 1$ Elementen. Diese Familie ist auch linear unabhängig, wenn wir sie als Familie von Vektoren in V betrachten. Das ist ein Widerspruch, also ist U endlich erzeugt.

Abschnitt 6.4 im Skript

Dimension eines Untervektorraums

Also hat U eine Basis $u_1, \ldots, u_r$. Die Familie $u_1, \ldots, u_r$ ist linear unabh. auch in V, wir können sie also zu einer Basis von V ergänzen, das bedeutet $\dim U \leq \dim V$.

zu (2). Sei nun $\dim U = \dim V$ und $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U. Dann ist $u_1, \ldots, u_r$ eine lin. unabh. Fam. von Vektoren in V mit $\dim V$ Elementen, also eine Basis von V, insbes. ein Erzeugendensystem von V. Also gilt $U = V$

Abschnitt 6.4 im Skript

Quiz

Seien V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Richtig oder falsch?

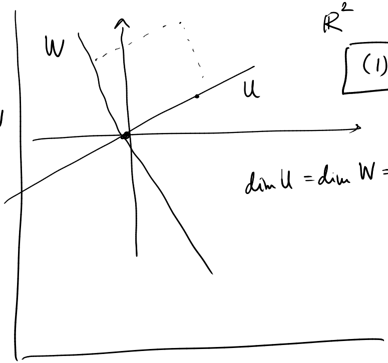
(1) $\dim U \leq \dim W \Rightarrow U \subseteq W$. falsch

(2) $\dim U \leq \dim W \Leftarrow U \subseteq W$. richtig, denn U UVR von W

(3) $\dim U \cap W \leq \dim U \leq \dim(U + W)$.

(4) $U, W \subsetneq V \Rightarrow \dim(U + W) < \dim V$

(5) $U, W \subsetneq V \Leftarrow \dim(U + W) < \dim V$



$\boxed{(1), (4)}$

$\dim U = \dim W = 1$

falsch

richtig, denn es folgt $U \subseteq U+W \subsetneq V$, $W \subseteq U+W$

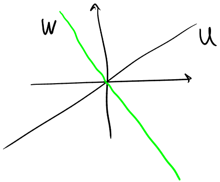
richtig, denn $U \cap W \subseteq U \subseteq U+W$, $U \cap W \subseteq W \subseteq U+W$

Existenz von Komplementärräumen

Seien K ein Körper, V ein K-VR.

Ist $U \subseteq V$ ein UVR, dann heißt ein UVR $W \subseteq V$ ein Komplement von U,

falls $U \oplus W = V$ (d.h. $U \cap W = 0$, $U + W = V$)



Satz Sei V ein endlich erzeugter K-VR, $U \subseteq V$ ein UVR.

Dann existiert ein Komplementärraum $W \subseteq V$ zu U.

Beweis Sei $u_1, \dots, u_r$ eine Basis von U. Diese ergänzen wir zu einer Basis $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ von V. Wir definieren: $W := \langle v_1, \dots, v_s \rangle$.

zz: ① $U + W = V$ ② $U \cap W = 0$

zu ① Weil $U+W$ sowohl U als auch W enthält, liegt die Basis $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ in $U+W$.

zu ② Ist $v \in U \cap W$, dann $v = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i = \sum_{j=1}^{s} b_j v_j$, so ist

$\sum_i a_i u_i - \sum_j b_j v_j = 0$. Da $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ l.u., folgt $a_1 = \dots = a_r = b_1 = \dots = b_s = 0$, also $v = 0$.

Quiz

Vorbemerkung: Ist $U \oplus W = V$, so gilt $\dim U + \dim W = \dim V$.
(denn ist $u_1, \ldots, u_r$ Basis von U, $w_1, \ldots, w_s$ Basis von W, so ist $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ Basis von V)

Finden Sie Komplementärräume von

dim = 1. $\leadsto$ Komplement hat Dim 2

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}^3, \qquad \text{z.B.} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\longrightarrow \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{in} \quad \mathbb{F}_2^3. \qquad \text{z.B.} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

dim 2

Dimensionsformel für Untervektorräume

__Satz__ Seien K ein Körper, V ein endl. erzeugter K-VR, $U, W \leq V$ UVR.

Dann gilt
$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{r+s}{U} \arrow[dr, phantom, "\subseteq" sloped] & \\
\underset{r}{U \cap W} \arrow[ur, phantom, "\subseteq" sloped] \arrow[dr, phantom, "\subseteq" sloped] & & \underset{r+s+t}{U+W} \\
 & \underset{r+t}{W} \arrow[ur, phantom, "\subseteq" sloped] &
\end{tikzcd}$$

__Beweis__ Sei $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von $U \cap W$.

Wir ergänzen diese zu

- einer Basis $v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s$ von U
- einer Basis $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_t$ von W

__Beh__ $v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t$ ist Basis von $U+W$ (daraus folgt der Satz)

__Begründung__

- Erzeugendensystem: klar
- linear unabh.: Betrachte LK $a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r + b_1 u_1 + \ldots + b_s u_s + c_1 w_1 + \ldots + c_t w_t = 0$

Dimensionsformel für Untervektorräume

zz: es gilt $a_1 = \ldots = a_r = b_1 = \ldots = b_s = c_1 = \ldots = c_t = 0$.

Jedenfalls $\underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r + b_1 u_1 + \ldots + b_s u_s}_{\in U} = \underbrace{-c_1 w_1 - \ldots - c_t w_t}_{\in W}$

Dieses Element liegt also in $U \cap W$, lässt sich also als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_r$ darstellen.

Weil $v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s$ eine Basis von U sind, folgt $b_1 = \ldots = b_s = 0$

Also $a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r + c_1 w_1 + \ldots + c_t w_t = 0$, das bedeutet $a_1 = \ldots = a_r = c_1 = \ldots = c_t = 0$.

Quiz

Seien $U, W \subseteq \mathbb{Q}^5$ Untervektorräume mit $\dim U = \dim W = 3$. Welche Dimension hat $U \cap W$ mindestens?

Es gilt $\quad \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 6 - \underbrace{\dim(U+W)}_{\leq 5} \geq 1.$

Weil $\quad \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \cap \langle e_3, e_4, e_5 \rangle = \langle e_3 \rangle$ eindimensional ist,

ist dies die beste mögliche Abschätzung.