Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit
Übersicht Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung: Wo stehen wir

K Körper

Vektorraum über K: V, $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$

$+$: assoziativ, neutrales Elem 0, inverse Elem $-v$, kommutativ

$\cdot$: "assoziativ", $1 \cdot v = v$, Distributivgesetze

Untervektorraum

$\emptyset \neq U \subseteq V$ (VR)

U abgeschl. unter $+$: für alle $u, u' \in U$: $u + u' \in U$

abgeschl. unter $\cdot$: für alle $a \in K$, $u \in U$: $au \in U$

Abschnitt 6.1 im Skript

Linearkombination, lineare Hülle

V ein K-VR

$v_1, \ldots, v_n \in V \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n}_{\text{Linearkombination der } v_i}, \quad a_i \in K$

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle :=$ Menge aller Linearkombinationen

lineare Hülle

$\subseteq V$ UVR

Abschnitt 6.2 im Skript

Basis, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit

V ein VR über K

Familie

$v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt

- Basis wenn jedes $v \in V$ sich eindeutig als LK der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ schreiben lässt:

  es ex. eind. bestimmte $a_1, \ldots, a_n \in K$: $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$

- Erzeugendensystem wenn jedes $v \in V$ sich als LK der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ schreiben lässt

- linear unabhängig wenn $0 \in V$ in eindeutiger Weise als LK der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ darstellbar ist, also nur als $\underbrace{0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 v_n}_{\text{triviale Linearkombination}}$ (alle Koeffizienten $=0$)

Abschnitte 6.2, 6.3 im Skript

Produkt und direkte Summe von Vektorräumen

K Körper

V_1, V_2 über K $\rightsquigarrow$ $V_1 \times V_2$ VR mit komponentenweiser Add., Skalarmult.

allgemein: $V_1 \times \dots \times V_n$, $\prod_{i \in I} V_i$

Direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i \subseteq \prod_{i \in I} V_i$

alle $(v_i)_i$, wo höchstens endlich viele $v_i \neq 0$ sind.

Abschnitt 6.6 im Skript

Ausblick: Basen

Nächste Woche:

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Je zwei Basen haben die gleiche Anzahl von Elementen.

Abschnitt 6.4 im Skript

Die Begriffe der Linearkombination und der Basis

Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Linearkombination

K Körper, V ein Vektorraum

Def (1) Eine Linearkombination von Elementen $v_1, \dots, v_n \in V$ ist ein Ausdruck der Form

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

mit $a_i \in K$ ("Koeffizienten")

(2) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine (möglicherweise unendliche) Familie von Elementen von V, so ist eine Linearkombination dieser Familie eine Summe

$$\sum_{i \in I} a_i v_i \quad \text{mit } a_i \in K, \text{ wo höchstens endlich viele } a_i \neq 0 \text{ sind.}$$

Lösungsmenge homog LGS

$$\left\{ x \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} + x'' \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} ; \quad x, x', x'' \in K \right\}$$

K^n

$\in K$

Bsp

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LK in $\mathbb{Q}^3$, Wert $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \text{ lösbar?} \qquad \text{Gauß-Algorithmus} \rightsquigarrow \qquad \underline{\underline{\text{nein}}}$$

Seien $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$. Lässt sich $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als LK von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ darstellen?

Seien $K = \mathbb{F}_5$, $V = \mathbb{F}_5^{\cancel{3}\,2}$. Lässt sich $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ als LK von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ darstellen? $\leftarrow$

- Ausprobieren, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{F}_5^2$

- Allgemein: v LK von $v_1, \ldots, v_n \in K^m$ $\iff$ es existieren $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = v$ $\longleftrightarrow$ LGS

  $\iff$ $Aa = v$, wobei A Matrix mit Spalten v_i, $a = (a_1, \ldots, a_n)^t \in K^n$

Basis

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum.

Def. (1) Eine Familie $v_1, \dots, v_n \in V$ heißt Basis, wenn sich jedes Element von V in eindeutiger Weise als Linearkombination der v_i schreiben lässt.

Mit anderen Worten: für alle $v \in V$ existiert ein eind. bestimmtes n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)^t \in K^n$ mit $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

(2) Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Elementen aus V mit (möglicherweise unendlicher) Indexmenge I heißt Basis von V, wenn sich jedes Element von V in eindeutiger Weise als Linearkombination der Familie $(v_i)_{i\in I}$ schreiben lässt, also als $\sum_{i\in I} a_i v_i$, höchstens endlich viele $a_i \neq 0$

Beispiel: Die Standardbasis von K^n

Die Elemente

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von K^n und heißen die Standardbasisvektoren.

Begründung: Ist $(x_1, \ldots, x_n)^t \in K^n$, so gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

und die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

Quiz

Ist $\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\2\\3\\1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\end{array}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^4$? JA

A ist invertierbar

$\Updownarrow$

$\boxed{A \text{ hat RZSF } E_4}$

$\Updownarrow$

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix mit Spalten v_1, v_2, v_3, v_4.

Dann: $v_1, \ldots v_4$ Basis $\Longleftrightarrow$ $\forall\, b \in \mathbb{Q}^4$ existiert ein eind. bestimmtes Element $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{Q}^4$ mit $b = x_1 v_1 + \ldots + x_4 v_4$

$\Longleftrightarrow$ für alle $b \in \mathbb{Q}^4$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar

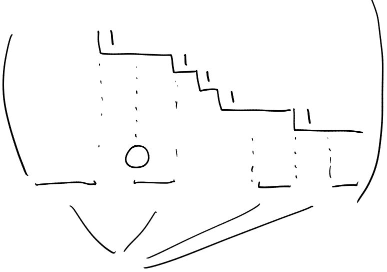
Basis für die Lösungsmenge eines homogenen LGS

$A \in M_{m \times n}(K)$

r Anzahl führende Einsen

Betrachte homog LGS $\quad Ax = 0$

Finde Lösungsmenge: $\quad$ Bringe A auf RZSF



$n-r$ freie wählbare Var.

$$\rightsquigarrow \mathbb{L} = \Bigg\{ \underbrace{x_1 \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \dots + x_{n-r} \overset{v_{n-r}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{unterschiedliche Wahlen der } x_i \text{ ergeben unterschiedliche Lösungsvektoren}} \;;\; x_i \in K \Bigg\} \subseteq K^n$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\rightsquigarrow$ jeder Lösungsvektor entsteht durch genau eine Wahl der Koeffizienten $x_1, \dots, x_{n-r}$

Also: $v_1, \dots, v_{n-r}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{L}$.

Erzeugendensysteme
Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lineare Hülle

= von einer Teilmenge erzeugter Untervektorraum

K Körper, V ein K-Vektorraum.

Def. (1) Sind $v_1, \dots, v_n \in V$, so heißt

Menge aller Linearkombinationen der v_i

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ ; \ a_i \in K \right\}$$

der von den $v_1, \dots, v_n$ erzeugte UVR, oder die lineare Hülle, oder der Spann, oder aufgespannte UVR.

Englisch: span

(2) Ist $M \subseteq V$ eine Teilmenge, so heißt

Menge aller LK von Elem. aus M

$$\langle M \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i m_i \ ; \ \begin{array}{l} a_i \in K \\ m_i \in M \\ N \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

der von M erzeugte Untervektorraum.

Lineare Hülle

$M \subseteq V$ z.B. $M = \{v_1, \dots, v_n\}$

Bem. Es handelt sich tatsächlich um einen UVR:

- $0 \in \langle M \rangle$: setze alle Koeff $= 0$ (oder: leere Summe)

- für $v, v' \in \langle M \rangle$ ist $v + v' \in \langle M \rangle$: schreibe $v = \sum a_i m_i$
  $v' = \sum b_j m_j$

  Dann ist auch $v + v'$ eine Linearkombination von Elementen aus M.

  (In Situation von Teil (1): $\sum a_i v_i + \sum b_i v_i = \sum (a_i + b_i) v_i$)

- für $a \in K$, $v \in \langle M \rangle$ ist $av \in \langle M \rangle$: schreibe $v = \sum a_i m_i$,
  dann $av = \sum (a a_i) m_i \in \langle M \rangle$.

Außerdem: Ist $U \subseteq V$ ein UVR mit $M \subseteq U$, so gilt

(*) $\langle M \rangle \subseteq U$.

Das bedeutet: $\langle M \rangle$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält,

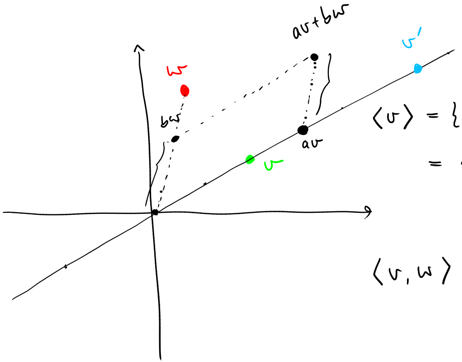
m.a.W.

$$\langle M \rangle = \bigcap_{U \subseteq V \text{ UVR},\, M \subseteq U} U$$

(*) $\subseteq$

(**) $\supseteq$

Beispiel: $\mathbb{R}^2$



$$\langle v \rangle = \{ av ;\ a \in \mathbb{R} \} \ni v'$$

$$= \langle v, v' \rangle = \langle v' \rangle$$

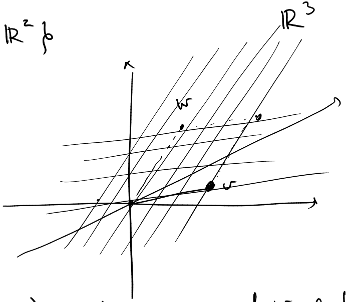
$$\langle v, w \rangle = \{ av + bw ;\ a, b \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \mathbb{R}^2$$

(**)

$\langle M \rangle$ ist UVR, der M enthält

$\rightsquigarrow$ $\langle M \rangle$ tritt auf als eines der U im Durchschnitt



$\langle v, w \rangle$ = die von v und w aufgespannte Ebene im $\mathbb{R}^3$

Quiz

Ist im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$

$$U = \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}} \right\rangle}_{= W} ?$$

JA

- $U = W \iff U \subseteq W$ und $W \subseteq U$
- $U \subseteq W \iff u_1, u_2 \in W$

  $W \subseteq U \iff w_1, w_2 \in U \iff$ $Ax = w_1$, $Ax = w_2$ lösbar, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Matrix mit Spalten u_1, u_2

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{elem. Z.Umf.}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$u_1 \quad u_2 \quad w_1 \quad w_2$

$\rightsquigarrow W \subseteq U$

noch: $U \subseteq W$

selbe Umf.

$$(w_1 \; w_2 \mid u_1 \; u_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ZSF}$$

$\rightsquigarrow U \subseteq W$

Erzeugendensystem

Seien K ein Körper und V ein K-VR.

Def.: Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V,

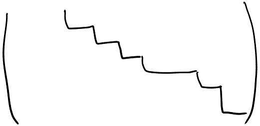
wenn $\langle M \rangle = V$.

Mit anderen Worten: Wenn sich jedes $v \in V$ als Linearkombination

von Elementen aus M darstellen lässt.

Beispiel

- Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
- Jeder Vektorraum V besitzt ein Erzeugendensystem, zum Beispiel V selbst.
- $v_1, \dots, v_r \in K^m$ bilden genau dann ein Erzeugendensystem, wenn für alle $b \in K^m$ das LGS $Ax = b$ lösbar ist, wobei A die Matrix mit Spalten $v_1, \dots, v_r$ ist.

$\rightsquigarrow$ A hat (R)ZSF der Form  ohne Nullzeile

Endlich erzeugt

Def. Ein K-VR V heißt <u>endlich erzeugt</u>, wenn es ein Erzeugendensystem gibt, das aus endlich vielen Elementen besteht.

Beispiel
- K^n
- Lösungsmengen von homog. LGS.

Lineare Unabhängigkeit
Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Basis ⟷ Erzeugendensystem

eines VR V über Körper K

Familie von Vektoren aus V, s.d. sich jedes $v \in V$ eindeutig als LK darstellen lässt

$M \subseteq V$ ES:
jedes $v \in V$ lässt sich als LK von Elem aus M darstellen

Die triviale Linearkombination

Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$, so heißt $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 v_n$ die <u>triviale Linearkombination</u>

Entsprechend für $(v_i)_{i \in I}$: triviale LK ist $\sum_{i \in I} a_i v_i$ mit $a_i = 0$ für alle i.

Lineare Unabhängigkeit

Seien K ein Körper und V ein K-VR.

Def. (1) Eine Familie $v_1, \dots, v_n \in V$ heißt <u>linear unabhängig</u>, wenn die triviale Linearkombination die <u>einzige</u> Möglichkeit ist, den Nullvektor als LK der Vektoren $v_1, \dots v_n$ darzustellen.

Äquivalent: $v_1, \dots, v_n$ l.u. $\Leftrightarrow$ für alle $a_1, \dots a_n \in K$ mit

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

gilt $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

(2) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Elementen von V heißt linear unabhängig, wenn die triviale Linearkombination die einzig mögliche Darstellung des Nullvektors als LK der Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist.

Eine Familie, die nicht linear unabhängig ist, heißt linear abhängig.

Beispiele

- Jede Basis eines Vektorraums ist linear unabhängig.

- Jede Teilfamilie einer linear unabh. Familie ist linear unabh.:
  Ist $(v_i)_{i\in I}$ l.u. und $J \subseteq I$, so ist auch $(v_i)_{i\in J}$ l.u.

- $\emptyset$ ist linear unabhängig (leere Summe ist einzige LK)

- $0, v_2, \ldots v_n$ (jede Familie, die den Nullvektor enthält)
  ist linear abhängig: $\underbrace{1}_{\text{Koeff} \neq 0} \cdot 0 + 0 v_2 + \ldots + 0 v_n = 0$.

  v, v ist eine linear abhängige Familie: $1 \cdot v + (-1) \cdot v = 0$.

Quiz

Methode. $v_1, \dots, v_r \in K^m$ l.u.

$\iff$ $Ax = 0$ hat nur triviale Lösung,

wobei A die Matrix mit Spalten $v_1, \dots, v_r$

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

...in $\mathbb{Q}^3$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elem. Z.Umf.}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

eindeutig lösbar

$\hat{=}$ keine frei wählbare Unbek.

$\hat{=}$ in jeder Spalte führende Eins

...in $\mathbb{C}^3$: $\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow$ Nein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lösungsvektor des entsprechenden LGS

Konsequenzen/Charakterisierungen linearer Unabhängigkeit

<u>Lemma</u> Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.
Dann sind äquivalent

(i) $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig

(ii) für alle $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ist v <u>eindeutig</u> als LK der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ darstellbar.

(iii) für alle i gilt $\quad v_i \notin \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$

(iv) für alle i gilt $\quad \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle \subsetneq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

echte Teilmenge

(v) $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sind linear unabhängig und $v_n \notin \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$

<u>Beweis</u> durch vollständige Induktion nach n. <u>IA</u> $n = 1$. In diesem Fall sind alle Aussagen äquivalent zu $v_1 \neq 0$.

<u>IS $n>1$</u> Wir zeigen $(i) \overset{\checkmark}{\Longleftrightarrow} (ii)$, $\underbrace{(iii) \Longleftrightarrow (iv)}_{\text{einfach}}$, $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$

(i) $v_1, \dots, v_n$ l.u.

(ii) $\forall v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$:
eind. Darst. von v als LK

<u>$(i) \Rightarrow (ii)$</u> Wäre $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

mit $v = \sum a_i v_i = \sum b_i v_i$

für $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n)$,

so folgt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i = 0$

und die lineare Unabhängigkeit

der v_i besagt: $a_i - b_i = 0$ für alle i.

Die Darstellungen von v als LK der v_i

müssen übereinstimmen.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wende (ii) an auf $v = 0$.

(i) ⇒ (iii) Sei i gegeben, $1 \leq i \leq n$.

Wäre $v_i \in \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$,

alle LK von $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n$

dann existieren $a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n \in K$ mit

$$v_i = a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_n v_n$$

$$\Rightarrow \quad a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} - v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_n v_n = 0$$

Koeffizient $-1 \neq 0$

Im Widerspruch zur linearen Unabh. der $v_1, \ldots v_n$.

(i) $v_1, \ldots v_n$ l.u.

(iii) $\forall i: \; v_i \notin \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n \rangle$

(v) $v_1, \ldots v_{n-1}$ l.u. und $v_n \notin \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$

für Fam. von $n-1$ Vektoren sind (i) bis (v) äquiv., insbes.: (iii) ⇒ (i)

(iii) ⇒ (v)

Nach IV gilt $v_1, \ldots v_{n-1}$ linear unabhängig.

Der zweite Teil von (v) folgt direkt aus (iii).

(v) $\Rightarrow$ (i)

(v) $v_1, \dots, v_{n-1}$ l.u.

$+ \; v_n \notin \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

(i) $v_1, \dots, v_n$ linear unabh.

Sei $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$.

Wollen zeigen: alle $a_i = 0$.

Wäre $a_n \neq 0$, so wäre

$$v_n = -\frac{1}{a_n}\left(a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}\right) \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle,$$ was wir ausgeschlossen haben.

Also ist $a_n = 0$.

Wir haben dann $a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} = 0$.

Da $v_1, \dots, v_{n-1}$ l.u., folgt $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Produkt und direkte Summe von Vektorräumen

Vorlesungswoche 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Produkt von Vektorräumen

Sei K ein Körper.

Sind V_1, V_2 Vektorräume, so ist

$$V_1 \times V_2 = \left\{ (v_1, v_2) ; \begin{array}{l} v_1 \in V_1 \\ v_2 \in V_2 \end{array} \right\}$$

mit der komponentenweisen Addition $(v_1, v_2) + (v_1', v_2') := (v_1 + v_1', \; v_2 + v_2')$
und der komponentenweisen Skalarmultiplikation $a \cdot (v_1, v_2) := (a v_1, \; a v_2)$
ein Vektorraum über K, den wir als das Produkt der VR V_1 und V_2 bezeichnen.

Analog: $V_1 \times \dots \times V_n$ für K-VR $V_1, \dots, V_n$, $\prod_{i \in I} V_i$ für K-VR V_i, $i \in I$

Spezialfälle: $V^n := \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ Kopien}}$, $V^I := \prod_{i \in I} V$

Beispiel: $K^n = K \times \dots \times K$

Direkte Summe von Vektorräumen

Sei K ein Körper, I eine Menge, V_i, $i \in I$, seien K-Vektorräume.

Dann ist $\bigoplus_{i \in I} V_i = \left\{ (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \;;\; \begin{matrix} \text{nur endlich} \\ \text{viele } v_i \text{ sind} \\ \neq 0 \end{matrix} \right\} \subseteq \prod_{i \in I} V_i$

ein Untervektorraum von $\prod_{i \in I} V_i$, den wir als die direkte Summe der K-VR V_i bezeichnen.

(Warum UVR?
- $0 \in \bigoplus_{i \in I} V_i$, denn $\prod V_i \ni 0 = \text{"}(0, 0, \dots)\text{"} = (0)_{i \in I}$ ($0 \in V_i$)
- $\bigoplus V_i$ abgeschlossen unter $+$ ✓
- $\bigoplus V_i$ abgeschlossen unter $\cdot$ ✓)

Bem. Wenn I endlich ist, dann ist $\bigoplus_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} V_i$

Notation $V^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} V \subseteq \prod_{i \in I} V = V^I$

Direkte Summe von Vektorräumen

Hatten schon definiert: V VR, $U, W \subseteq V$ UVR.

Schreiben $U \oplus W$ für die Summe $U+W = \{u+w;\ u \in U,\ w \in W\}$

wenn $U \cap W = \{0\}$

Mit der neuen Definition können wir $\overset{U \times W}{\overset{/\!/}{U \oplus W}}$ für beliebige UVR von V bilden.

Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} U \times W &\xrightarrow{f} U + W \subseteq V, \quad \text{surjektiv} \\ (u, w) &\longmapsto u + w \end{aligned}$$

Dann gilt: $\quad f$ injektiv $\iff U \cap W = \{0\}$

'$\Leftarrow$' Hatten gesehen: falls $U \cap W = 0$, so hat jedes Element aus $U+W$ eind. Darstellung als Summe $u+w$, $u \in U, w \in W$

'$\Rightarrow$' $\circledast$

Also: falls $U \cap W = 0$, so ist

$U \times W \to U + W \subseteq V$ bijektiv, und wir können den VR identifizieren.

Direkte Summe von Vektorräumen

f injektiv

$\circledast$ Sei f injektiv, $v \in U \cap W$

Dann gilt $f((v, -v)) = v + (-v) = 0 = f((0,0)) \Rightarrow (v,-v) = (0,0)$

$\Rightarrow v = 0$

Beispiel eines nicht endlich erzeugten Vektorraums

Sei K ein Körper. Haben definiert: $K^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} K = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} ; a_n \in K\}$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$V := K^{(\mathbb{N})} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} ; \begin{array}{l} a_n \in K, \\ \text{nur endlich viele} \\ a_n \neq 0 \end{array}\right\}$$

<u>Beh</u> V ist nicht endlich erzeugt.

<u>Begr</u>. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wir zeigen: $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \neq V$.

Alle v_i haben nur endlich viele von 0 verschiedene Einträge.

Es existiert daher $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle v_i alle Einträge mit Index $> N$ gleich Null sind. Dann haben auch alle LK von $v_1, \ldots, v_n$ nur Einträge $\neq 0$ an Stellen mit Index $\leq N$.

Sei $e_{N+1} \in V$ der Vektor mit einer 1 an der Stelle $N+1$, 0 überall sonst.

Dann gilt $e_{N+1} \notin \langle v_1, \ldots v_n \rangle$, also $\langle v_1, \ldots v_n \rangle \neq V$.

(Sehen später, auch $K^{\mathbb{N}}$ nicht endlich erzeugt.)