Invertierbare Matrizen; Vektorräume
Übersicht Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung: Wo stehen wir

Gauß-Algorithmus

Summe und Produkt von Matrizen

Abschnitte 5.2, 5.3 im Skript

Die Abbildung zu einer Matrix

Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Wir definieren die *zu A gehörige Abbildung*

$$f_A\colon K^n \to K^m, \quad x \mapsto Ax.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}}_{n} \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{\in K^n} \in \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\in K^m}$$

Abschnitt 5.3.3 im Skript

Invertierbare Matrizen

Definition

Eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ existiert mit

$$AB = BA = E_n.$$

(A invertierbar $\in M_n(K)$, dann ist $Ax = b \iff x = A^{-1}b$.

— nicht nützlich, um die Lösung dieses LGS zu berechnen)

A^{-1} die eindeutig bestimmte inverse Matrix zu A)

Abschnitt 5.3.4 im Skript

Vektorräume

"Körper" abstrahiert Rechenbereich mit $+, -, \cdot, /$

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

Vektorraum abstrahiert $(K^n, +, \cdot)$

Vektorraumaxiome:

- $+$ ist assoziativ
- $+$ ist kommutativ
-
- ⋮

$A \in M_{m \times n}(K)$

"Lineare Abbildung" $V \to W$

$f_A : K^n \to K^m$

Untervektorraum

Teilraum

Abschnitt 6.1 im Skript

Die zu einer Matrix gehörige Abbildung
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die Abbildung zu einer Matrix

Sei $A \in M_{m \times n}(K)$. Wir definieren die *zu A gehörige Abbildung*

$$f_A \colon K^n \to K^m, \quad x \mapsto Ax.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}}_{n} \begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix} \in K^m$$

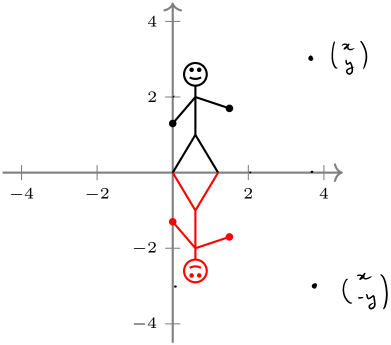
Abschnitt 5.3.3 im Skript

Beispiele

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

und diese Abbildung ist einfach die *Spiegelung an der x-Achse*.

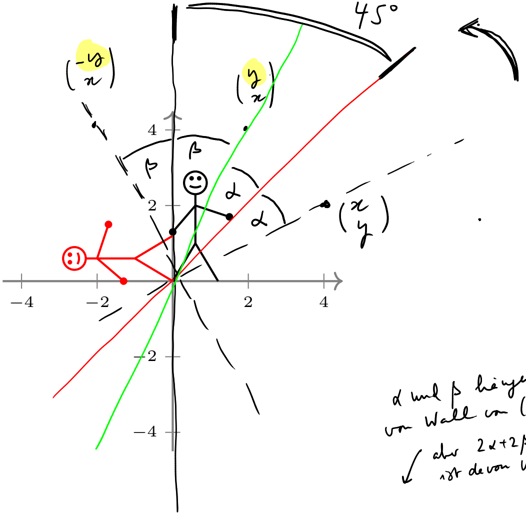


Beispiele

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

und diese Abbildung ist die *Drehung um* 90° *gegen den Uhrzeigersinn*.

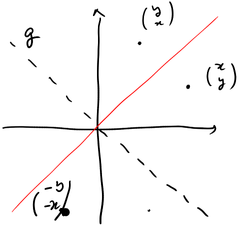


α und β hängen von der Wahl von $\binom{x}{y}$, aber $2\alpha + 2\beta$ ist davon unabh.

Abb. f_A ist Drehung um $2\alpha + 2\beta$, wobei $\alpha + \beta = 45^\circ$.

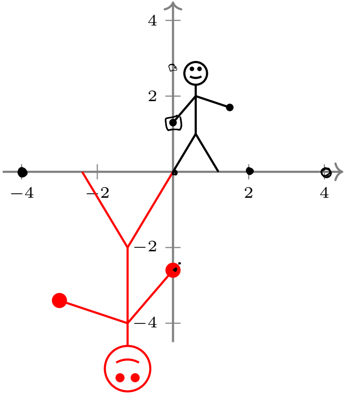
Quiz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$



Welche Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreibt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

geometrisch: Spiegelung an g



Welche Matrix A definiert eine Abbildung f_A mit dem im Bild gezeigten Effekt?

Streckung, Faktor 2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Drehung um 180°

Dies ist die Abbildung f_A

für $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Kern und Bild einer Matrix

Sei $A \in M_{m\times n}(K)$, $f_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$.

Def. (1) Der Kern $\mathrm{Ker}(A)$ von A ist $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in K^n;\ f_A(x) = 0\}$
$= \{x \in K^n;\ Ax = 0\}$

(2) Das Bild $\mathrm{Im}(A)$ von A ist $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A) = \{y \in K^m;$ es existiert $x \in K^n$ mit $y = f_A(x)\}$

Lemma Sei A eine Matrix in $M_{m\times n}(K)$.
Dann ist $\mathrm{Ker}(A) \subseteq K^n$ ein Teilraum, und $\mathrm{Im}(A) \subseteq K^m$ ein Teilraum.

Beweis Einfach, zum Beispiel: $x, x' \in \mathrm{Ker}(A)$, denn $A(x+x') = Ax + Ax'$
$= 0 + 0 = 0$,
das bedeutet $x + x' \in \mathrm{Ker}(A)$.

f_A und LGS mit Koeffizientenmatrix A

$A \in M_{m \times n}(K)$

Dann ist $\operatorname{Ker}(A) = \{ x \in K^n ;\ Ax = 0 \}$ = Lösungsmenge des homog. LGS mit Koeffizientenmatrix A

$\operatorname{Im}(A) = \{ b \in K^m ;$ es existiert $x \in K^n$ mit $Ax = b \} = \{ b \in K^m ;$ das LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ ist lösbar $\}$

Die Verkettung $f_A \circ f_B$

<u>Lemma</u> Seien $A \in M_{\ell \times m}(K)$, $B \in M_{m \times n}(K)$, mit zugehörigen

Abb. $f_A : K^m \longrightarrow K^\ell$, $f_B : K^n \longrightarrow K^m$

Dann gilt $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

<u>Beweis</u> Es gilt $(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = f_{AB}(x)$.

Invertierbare Matrizen
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Invertierbare Matrizen

Definition

Eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ existiert mit

$$AB = BA = E_n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

neutrales Element für Matrizenprodukt

Abschnitt 5.3.4 im Skript

Quiz: Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

nicht invertierbar (Nullzeile / Nullspalte)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

invertierbar

hat Inverses $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

sofern $2, 3 \neq 0$ in K

ist invertierbar mit Inversem $\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\left[A x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

Eigenschaften

- Ist A invertierbar, so ist die inverse Matrix <u>eindeutig</u> bestimmt.

  (Sind B, B' Inversen von A, so gilt $B = E_n B = \underbrace{(B'A)}_{=E_n} B = B' \underbrace{(AB)}_{=E_n} = B'$.)

  $\rightsquigarrow$ Bezeichnung A^{-1} für das Inverse von A

- Sind $A, B \in M_n(K)$ invertierbar, so ist auch AB invertierbar und

  $$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

  Begr. $(AB) \cdot (B^{-1} A^{-1}) = A \underbrace{B B^{-1}}_{=E_n} A^{-1} = E_n$

  $(B^{-1} A^{-1})(AB) = \dots = E_n$.

- $E_{ij}(a)$ ist invertierbar,

$$\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 1 & & a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} - i \qquad \text{und} \qquad E_{ij}(a)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E_{ij}(-a)$$

- $$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ i \qquad j & \end{array}$$

  $$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Invertierbarkeit und reduzierte Zeilenstufenform

- $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ ist invertierbar genau dann, wenn $a_1, \ldots, a_n \neq 0$, und dann ist $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$.

<u>Satz</u> Sei $A \in M_n(K)$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist E_n.

<u>Beweis</u> Sei A' eine Matrix in RZSF, die aus A durch elem. Zeilenumformungen entsteht. Dann existieren Matrizen $S_1, \ldots, S_\ell$ mit $A' = S_\ell \cdots S_2 S_1 A$ (nämlich die Matrizen, die diese elementaren Zeilenumf. beschreiben, diese sind alle invertierbar.)

<u>(i) ⇒ (ii)</u> Ist A invertierbar, so auch $S_\ell \cdots S_1 A = A'$, also kann A' keine Nullzeile haben.

<u>(ii) ⇒ (i)</u> Ist $A' = E_n$, so erhalten wir $A = S_1^{-1} \cdot S_2^{-1} \cdots S_\ell^{-1} A' = S_1^{-1} \cdots S_\ell^{-1}$ ← Produkt von invert. Matrizen, also ist A invertierbar.

Berechnung der inversen Matrix

(wobei $A' = S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A$)

Halten gesehen: $A = S_1^{-1} \cdots S_r^{-1}$,

also $A^{-1} = S_r \cdot \ldots \cdot S_1 = S_r \cdot \ldots \cdot S_1 E_n$

Das bedeutet: Wenn die RZSF von A die Einheitsmatrix ist, dann bringen genau dieselben Zeilenumformungen, die A auf die Form E_n bringen, die Einheitsmatrix auf die Matrix A^{-1}.

$$\rightsquigarrow \quad (A \mid E_n) \xrightarrow{\text{elem. Zeilenumf.}} (E_n \mid ?)$$

hier steht A^{-1}.

Quiz

Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \rightsquigarrow -Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \rightsquigarrow Z_1 - Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: (2×2)-Matrizen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$.

Schreibe $\delta(A) := ad - bc$ („Determinante" von A)

Haben gesehen: homog. lineares Gleichungssystem $\iff \delta(A) \neq 0$

$Ax = 0$ eind. lösbar

$\Updownarrow$

A invertierbar

In diesem Fall gilt $A^{-1} = \frac{1}{\delta(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Nachrechnen:

$AA^{-1} = A^{-1}A = E_2$

Links- oder Rechtsinverses „reicht aus"

Satz Sei $A \in M_n(K)$.

(1) Wenn $B \in M_n(K)$ existiert mit $AB = E_n$, dann ist A invertierbar und $A^{-1} = B$.

(2) Wenn $B \in M_n(K)$ existiert mit $BA = E_n$, dann ist A invertierbar und $A^{-1} = B$.

Beweis (1) gzz. A invertierbar, dazu gzz: RZSF von A ist E_n

Hatten gesehen: RZSF von A ist E_n $\iff$ für alle $b \in K^n$ ist $Ax = b$ lösbar.

Sei nun $b \in K^n$ gegeben. Dann ist Bb eine Lösung von $Ax = b$, denn $A(Bb) = (AB)b = E_n b = b$.

(2) analog: gzz: RZSF von A ist E_n, und das ist äquivalent zu: $Ax = 0$ eindeutig lösbar.

Ist $x \in K^n$ mit $Ax = 0$, so folgt $x = E_n x = (BA)x = B(\underbrace{Ax}_{=0}) = 0$.

Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

K Körper, $A \in M_{m \times n}(K)$

<u>Satz</u> Hat A ZSF, so ist die Anzahl und Position der führenden Einsen durch die Lösungsmenge des durch A gegebenen homogenen linearen Gleichungssystems bestimmt.

Daraus folgt: Ist $A \in M_{m \times n}(K)$ irgendeine Matrix, so haben alle Matrizen in ZSF, die aus A durch elem Zeilenumf dieselbe Lösungsmenge des zugeh. homog LGS, die führenden Einsen an denselben Stellen.

<u>Beweis</u> Sei $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$.

Induktion nach der Anzahl n der Spalten von A.

<u>IA $n=1$.</u> mögliche ZSF ist $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — äquivalent zu $\mathbb{L} = K$

oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — äquivalent zu $\mathbb{L} = \{0\}$.

IS $n > 1$ Für jede Matrix in $M_{m\times n}(K)$ in ZSF, hat auch die Matrix, die aus den ersten $n-1$ Spalten besteht, ZSF.

Sei A' die Matrix $\in M_{m\times(n-1)}(K)$, die aus den ersten $n-1$ Spalten von A besteht, und sei $\mathbb{L}'$ die Lösungsmenge des homog LGS $A'x=0$

$\cap$
K^{n-1}

IV: Anzahl + Pos. der führenden Einsen in A' ist bestimmt durch $\mathbb{L}'$.

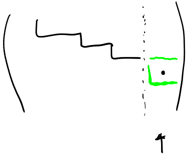
1. Schritt $\mathbb{L}'$ ist bestimmt durch $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L}' = \{ (x_1, \dots, x_{n-1})^t \in K^{n-1} \; ; \; (x_1, \dots x_{n-1}, 0)^t \in \mathbb{L} \}$$

$\cap$
K^n

Damit (+ IV) sehen wir: Lage der führenden Einsen in Spalten $1, \dots n-1$ ist bestimmt durch $\mathbb{L}$

2. Schritt Liegt auch in der letzten Spalte eine führende Eins?



In der letzten Spalte steht genau dann eine führende Eins, wenn in allen Elementen $(x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{L}$ gilt $x_n = 0$.

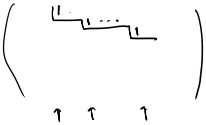
Satz Sei $A \in M_{m\times n}(K)$ und seien A', A'' Matrizen in RZSF, die aus A durch elem. Zeilenumformungen entstehen. Dann gilt $A' = A''$.

Beweis In dieser Situation können wir A'' aus A' durch elem. Zeilenumformungen erhalten. Das bedeutet, dass eine invertierbare Matrix $S \in M_m(K)$ existiert mit $A'' = SA'$. (S = Produkt der Matrizen zu diesen Zeilenumformungen.)

Beispiel $m=n$, $A' = E_n \xrightarrow[\text{Satz über ZSF}]{\text{vorherige}} A'' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E_n \overset{A''=SA'}{\Longrightarrow} S = E_n$.

Seien $j_1, \dots, j_r$ die Indizes der Spalten von A' (äquivalent: von A''), die führende Einsen enthalten.

Sei $B \in M_{m \times r}(K)$ die Matrix, die durch Streichen aller anderen Spalten (aus A' oder äquivalent aus A'') entsteht



Dann gilt $$B = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}}_{r} \Bigg\} m$$

und aus $A'' = SA'$ folgt $B = SB$,

also $$\begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} r & m-r \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} E_r & S_{21} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}$$

Die Zeilen $r+1, \dots, m$ in A' und A'' sind Nullzeilen.

$\leadsto$ gzz. die ersten r Zeilen in A' und A'' stimmen überein.

Notation: Für eine Matrix M bezeichne $M_{\le r}$ die Matrix, die aus den ersten r Zeilen von M besteht.

Dann gilt:

$$\underline{\underline{A''_{\le r}}} = (SA')_{\le r} = S_{\le r} \cdot A'$$

$$= (E_r \quad S_{21}) \underbrace{\begin{pmatrix} A'_{\le r} \\ 0 \end{pmatrix}}_{n} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, m-r \end{matrix} = \underline{\underline{A'_{\le r}}}$$

Vektorräume
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition Vektorraum

Idee: Abstrahiere Rechenoperationen $+$, $\cdot$ auf K^n.

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

$+ : K^n \times K^n \longrightarrow K^n$

- Assoziativ- Kommutativgesetz
- Neutrales Element $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- Inverse Elemente: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cdot : K \times K^n \to K^n$

- "Assoziativität" $(ab)x = a(bx)$, $a,b \in K$, $x \in K^n$
- "Neutrales Elem" $1 \cdot x = x$

Distributivgesetze: $\underset{\substack{\uparrow \\ + \text{ in } K}}{(a+b)}\, x = ax + bx$, $\quad a \underset{\substack{\uparrow \\ + \text{ in } K^n}}{(x+y)} = ax + ay$ $\quad a,b \in K$, $x,y \in K^n$.

Addition Skalarmultiplikation

K-Vektorraum

Menge V mit $+: V \times V \to V$, $\cdot: K \times V \to V$, so dass

(1) (a) Die Verknüpfung $+$ auf V ist *assoziativ*.

(b) Die Verknüpfung $+$ auf V besitzt genau ein neutrales Element 0.

(c) Jedes Element $v \in V$ besitzt ein inverses Element bezüglich $+$. ← eindeutig bestimmt, Bezeichnung $-v$

(d) Die Verknüpfung $+$ auf V ist kommutativ.

(2) (a) Für alle $a, b \in K$, $v \in V$ gilt: $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$. „assoziativ"

(b) Für alle $v \in V$ gilt $1 \cdot v = v$. „neutrales Element"

(c) Für alle $a, b \in K$, $v \in V$ gilt: $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.

(d) Für alle $a \in K$, $v, w \in V$ gilt: $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$.

Distributivgesetze

- Das additive Inverse von $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und wird mit $-v$ bezeichnet.

  Wir setzen $\quad v - w := v + (-w)$

- Der Punkt $\cdot$ "Skalarmultiplikation" wird oft ausgelassen.

  Es gilt Punkt- vor Strichrechnung.

- Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren.

Beispiele

K Körper

- K^n, $n \in \mathbb{N}$. "Standardvektorraum über K"

- $\{0\}$ Nullvektorraum, Schreibweise $0 = \{0\} = K^0$

- $M_{m \times n}(K)$ mit Addition und Skalarmult. von Matrizen.

- Jeder Teilraum $U \subseteq K^n$ ist mit der Einschränkung von Addition und Skalarmult. auf $U \times U$ bzw. $K \times U$ ein Vektorraum.

- Ist M eine Menge, so wird $\mathrm{Abb}(M, K) = \{ f : M \to K \text{ Abb.} \}$ zu einem Vektorraum über K, wenn wir definieren: $f+g : M \to K$, $m \mapsto f(m)+g(m)$

  $af : M \to K$, $m \mapsto a f(m)$, $a \in K$, $f, g \in \mathrm{Abb}(M,K)$.

- $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (auch: $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{Q}$-VR, $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-VR).

  $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Vektorräume - Rechenregeln
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(1) Für $a \in K$ und $v \in V$: $\quad av = 0 \; (\in V) \iff a = 0$ oder $v = 0$

Begr. '$\Leftarrow$'. Sei $a = 0$: $\quad 0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0v \implies 0 = 0v$

addiere $-(0v)$ auf beiden Seiten

Sei $v = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot 0 = a(0+0) = \\ a \cdot 0 + a0 \end{array} \right\} \implies 0 = a \cdot 0.$$

'$\Rightarrow$'. Seien $a \in K$, $a \neq 0$, $v \in V$, $v \neq 0$. Dann gilt

$$\underbrace{a^{-1}}_{}\,\underbrace{(av)}_{} = (a^{-1}a)\,v = 1 \cdot v = v \underbrace{\neq 0}_{} \implies av \neq 0$$

Implikation '$\Leftarrow$'.

(2) Seien $a \in K$, $v \in V$. Dann gilt $\underbrace{-(av)}_{\substack{\text{add. Inv.} \\ \text{von } av}} = (-a)v = a \cdot (-v)$.

Begründung:

- $av + (-a)v = (a + (-a))v = 0v \underset{(1)}{=} 0 \quad (\in V) \Rightarrow (-a)v = -(av)$.

- $av + a(-v) = a\,(\underbrace{v + (-v)}_{=0}) = a \cdot 0 \underset{(1)}{=} 0$

Speziell für $a = 1$: $(-1)v = 1 \cdot (-v) = -v$.

---

(3) $a \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i = a(v_1 + \ldots + v_n) = av_1 + \ldots + av_n$ (folgt per Induktion aus Distributivgesetz)

analog: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) v = \sum_{i=1}^{n} a_i v$ $\quad a \in K$, $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Untervektorräume
Vorlesungswoche 4

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Untervektorräume

$0 \in U$

Definition

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum (oder Teilraum) von V*, wenn U abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist, das bedeutet: Sind $u, u' \in U$, so gilt auch $u + u' \in U$. Ist $u \in U$ und $a \in K$, so ist $au \in U$.

Bemerkung Sei $u \in U$. Dann gilt $-u = (-1) \cdot u \in U$

und $0 = u + (-u) \in U$.

$\rightsquigarrow$ Ist $U \subseteq V$ ein UVR, so ist U mit $U \times U \longrightarrow U,\ (u,u') \mapsto u+u'$, $K \times U \longrightarrow U,\ (a,u) \mapsto au$

selbst ein Vektorraum über K.

Definition 6.7 im Skript

Beispiele

- Für $V = K^n$ ist ein UVR genau ein Teilraum, wie wir es vorher definiert hatten.

  Insbesondere: Jede Lösungsmenge eines homog. LGS in n Unbestimmten ist ein UVR von K^n

- Der Durchschnitt von UVR ist ein UVR.

Quiz

Sei V der Vektorraum der Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von V?

Nullvektor in V ist die Funktion $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$

$$U = \{f \in V;\ f(0) = 0\}$$ ✓

$$U = \{f \in V;\ f(1) = 0\}$$ ✓

(kein UVR: $\{f \in V;\ f(0) = 1\} \not\ni 0$)

$$U = \{f \in V;\ f(x) = ax^2 + x + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$ ← kein UVR, da $0 \notin U$

$$U = \{f \in V;\ f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$$ ✓ UVR

~~Durchschnitt und~~ Summe von Untervektorräumen

Def. Seien V ein K-VR und $U, W \subseteq V$ UVR. Wir definieren

$$U + W := \{ u + w \,;\, u \in U,\ w \in W \} \subseteq V$$ "Summe von U und V"

- Dies ist ein UVR von V: $0 \in U$, $0 \in W \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in U + W$.

  abgeschlossen unter $+$: $(u+w) + (u'+w') \in U + W$? Ja, denn $(u+w)+(u'+w') = \underbrace{(u+u')}_{\in U} + \underbrace{(w+w')}_{\in W}$.

  unter $\cdot$ ähnlich.

- Ist $V' \subseteq V$ ein UVR mit $U \subseteq V'$, $W \subseteq V'$, so gilt $U + W \subseteq V'$.

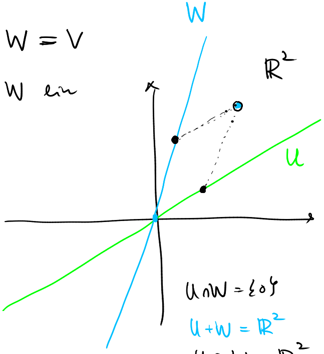
Können sagen: $U+W$ ist der <u>kleinste</u> UVR von V, der U und W enthält.

Folgerung:
$$U + W = \bigcap_{\substack{V' \subseteq V \text{ UVR,} \\ \text{mit } U, W \subseteq V'}} V'$$

Direkte Summe, Komplement

Def. (1) Sind V ein K-VR und $U, W \subseteq V$ UVR mit $U \cap W = \{0\}$, so schreiben wir statt $U+W$ auch $U \oplus W$ und sagen, U und W bilden (in V) eine <u>direkte Summe</u>.

(2) Ist $U \subseteq V$ ein UVR und $W \subseteq V$ ein UVR mit $U \oplus W = V$ (das heißt $U \cap W = 0$ und $U + W = V$), dann heißt W ein Komplementärraum (oder: Komplement) zu U.



$U \cap W = \{0\}$

$U + W = \mathbb{R}^2$

$\leadsto U \oplus W = \mathbb{R}^2$

Quiz

Gilt in den folgenden Fällen $U + W = V$? $U \cap W = 0$? $U \oplus W = V$?

$U \oplus W = \mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{(a,a)^t;\ a \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(0,a)^t;\ a \in \mathbb{R}\}.$

$U \cap W = 0$

$V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(a,0,a)^t;\ a \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(0,a,0)^t;\ a \in \mathbb{R}\}.$ $U + W \neq \mathbb{R}^3$

$\not\ni (1,0,0)^t$

$V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}, \quad W = \{(x,y,z)^t;\ x - y + z = 0\}$

$(0,1,1)^t \in U \cap W$, $\quad U + W = \mathbb{R}^3$

$V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(a,b,a+b)^t;\ a,b \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3;\ x + y = z\}$

$U = W$, $\quad U \cap W = U \neq 0$, $\quad U + W = U \neq \mathbb{R}^3$

Direkte Summe

Lemma: $\oplus$ entspricht: eindeutige Darstellung der Form $u + w$

Seien V ein K-VR, $U, W \subseteq V$ UVR. Dann sind äquivalent:

(i) $U \oplus W = V$

(ii) Für alle $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte Elemente $u \in U$, $w \in W$ mit $u + w = v$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Weil $U + W = V$, existieren zu jedem $v \in V$ Elemente $u \in U$, $w \in W$ mit $u + w = v$.

Eindeutigkeit: Sei $u + w = v = u' + w'$, $u, u' \in U$, $w, w' \in W$.

Dann gilt $\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \in U \cap W = 0$, also $\begin{matrix} u - u' = 0 \\ w - w' = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u = u', \\ w = w'. \end{matrix}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es ist klar, dass $U + W = V$.

Sei nun $v \in U \cap W$, $v \neq 0$. Dann gilt $v = \underset{\in U}{0} + \underset{\in W}{v} = \underset{\in U}{v} + \underset{\in W}{0}$ — verschiedene Darstellungen im Widerspruch zu (ii).