Der Gauß-Algorithmus und das Matrizenprodukt
Übersicht Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung: Wo stehen wir

Körper

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n &= b_m
\end{aligned}$$

Kapitel 4, Abschnitt 5.1 im Skript

Erinnerung: Wo stehen wir

Körper

Matrizen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Kapitel 4, Abschnitt 5.1 im Skript

Der Gauß-Algorithmus

Ziel: Bringe gegebenes LGS systematisch auf ein LGS *mit derselben Lösungsmenge* in einer besonders einfachen Form (so dass man dann die Lösungsmenge direkt ablesen kann).

Abschnitt 5.2 im Skript

Der Gauß-Algorithmus

Ziel: Bringe gegebenes LGS systematisch auf ein LGS *mit derselben Lösungsmenge* in einer besonders einfachen Form (so dass man dann die Lösungsmenge direkt ablesen kann).

Zutaten:

- Elementare Zeilenumformungen
- Reduzierte Zeilenstufenform
- Der Algorithmus selbst
- Lösungsmenge eines LGS in (reduzierter) Zeilenstufenform

Abschnitt 5.2 im Skript

Der Gauß-Algorithmus

Ziel: Bringe gegebenes LGS systematisch auf ein LGS *mit derselben Lösungsmenge* in einer besonders einfachen Form (so dass man dann die Lösungsmenge direkt ablesen kann).

$A \in M_n(K)$ quadratisch

Äquivalent

(i) $(A|0)$ eindeutig lösbar

(ii) für alle $b \in K^n$ ist $(A|b)$ lösbar

Zutaten:

- Elementare Zeilenumformungen
- Reduzierte Zeilenstufenform
- Der Algorithmus selbst
- Lösungsmenge eines LGS in (reduzierter) Zeilenstufenform

Folgerungen

Abschnitt 5.2 im Skript

Teilräume von K^n

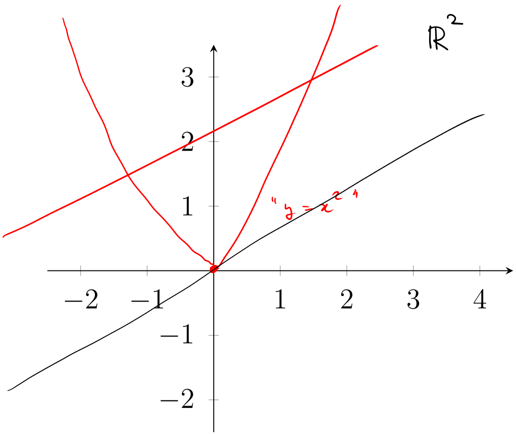
Idee: beschreibe Restriktionen, die für alle Lösungsmengen von homogenen LGS gelten

z.B. $\quad 0 \in \mathbb{L} \ (\subseteq K^n)$

$\quad\quad \| $

$(0, \ldots, 0)^t$

...



Abschnitt 5.2.3 im Skript

Das Matrizenprodukt

Addition von Matrizen gleicher Größe (eintragsweise)

Produkt AB $[\ldots]$

Lösungsmenge zu $(A \mid b)$: $\mathbb{L} = \{ x \in K^n ;\ Ax = b \}$

$A \in M_{m \times n}(K)$

$K^n = M_{n \times 1}(K)$

$b \in K^m = M_{m \times 1}(K)$

Der Gauß-Algorithmus: elementare Zeilenumformungen
Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Elementare Zeilenumformungen

Gleichung in LGS
Zeile einer Matrix (erw. Koeff.-matrix)

Definition

I Addiere ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile $\qquad z_i \rightsquigarrow z_i + a \cdot z_j$

$i \neq j, \quad a \in K^\times$

II Vertauschen zweier Zeilen $\qquad z_i \leftrightsquigarrow z_j, \quad i \neq j$

III Multiplikation einer Zeile mit $a \in K, \ a \neq 0$ $\qquad z_i \rightsquigarrow a z_i, \quad a \in K^\times$

Abschnitt 5.2.1 im Skript

Quiz

über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \rightsquigarrow Z_2 + 2Z_1,\ Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$1+1+1=0 \rightarrow -2=1$

über $\mathbb{F}_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightsquigarrow Z_3,\ Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenumformungen sind umkehrbar

Jede elem. Zeilenumformung lässt sich durch eine elementare Zeilenumformung umkehren:

Typ I $\qquad z_i \overset{\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} z_i + a z_j \xrightarrow{\mathrm{I}} (z_i + a z_j) - a z_j = z_i$

$i \neq j$

Typ II $\qquad$ Klar

Typ III $\qquad z_i \rightsquigarrow a z_i \rightsquigarrow a^{-1}(a z_i) = z_i$.

$a \in K^\times$

Elementare Zeilenumformungen und LGS

Lemma

Sei $(A \mid b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS. Wenn $(A' \mid b')$ aus $(A \mid b)$ durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht, dann haben die durch $(A \mid b)$ bzw. $(A' \mid b')$ beschriebenen LGS dieselbe Lösungsmenge.

Beweis: Seien $\mathbb{L}$ und $\mathbb{L}'$ die Lösungsmengen der LGS zu $(A|b)$, $(A'|b')$.

Wollen zeigen: $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$.

Genügt zu betrachten: $(A'|b')$ geht aus $(A|b)$ durch eine elem. Zeilenumf. hervor:

$$(A|b) \rightsquigarrow (A'|b').$$

Genügt zu zeigen: $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$

Andere Inklusion folgt mit demselben Argument, weil $(A'|b') \rightsquigarrow (A|b)$.

Lemma 5.12 im Skript

Elementare Zeilenumformungen und LGS

Lemma

Sei $(A \mid b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS. Wenn $(A' \mid b')$ aus $(A \mid b)$ durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht, dann haben die durch $(A \mid b)$ bzw. $(A' \mid b')$ beschriebenen LGS dieselbe Lösungsmenge.

$\mathbb{L} \in \mathbb{L}'$? Typ II, III: Klar.

$A = (a_{ik})_{i,k}$ $b = (b_i)$

$A' = (a'_{ik})_{i,k}$ $b' = (b'_i)$

Typ I $z_i \rightsquigarrow z_i + a z_j$, $i \neq j$, $a \in K$

$a'_{ik} = a_{ik} + a\, a_{jk}$, $b'_i = b_i + a b_j$

Sei $x = (x_k)_k \in K^n$ ein Elem. von $\mathbb{L}$. z.z. $x \in \mathbb{L}'$

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} x_k = \sum_k (a_{ik} + a\, a_{jk}) x_k = \sum_k a_{ik} x_k + a \sum_k a_{jk} x_k = b_i + a b_j = b'_i$$

Lemma 5.12 im Skript

Der Gauß-Algorithmus: die Zeilenstufenform

Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition Zeilenstufenform

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \bullet & * & \cdots & \bullet & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & \bullet & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & * & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & & & & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Definition

Sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.

(1) A hat *Zeilenstufenform*, wenn

- (a) In jeder Zeile ist der erste Eintrag, der von Null verschieden ist, gleich 1. (*Führende Eins*)
- (b) Alle Einträge unter einer führenden Eins sind Null.
- (c) Die führende Eins einer Zeile liegt rechts von der führenden Eins der darüberliegenden Zeile.

(2) A hat *reduzierte Zeilenstufenform*, wenn sie Zeilenstufenform hat und zusätzlich *alle* Einträge in einer Spalte einer führenden Eins, abgesehen von der führenden Eins selbst, gleich Null sind.

Definition 5.13 im Skript

Definition reduzierte Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix}
1 & * & * & \cdot & * & * & * & \cdot & \cdot & * & * \\
 & & & 1 & * & * & * & \cdot & \cdot & * & * \\
 & & & & & & & 1 & \cdot & * & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & * \\
 & & & & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

Quiz

Welche der folgenden Matrizen haben Zeilenstufenform, welche haben sogar reduzierte Zeilenstufenform?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

keine ZSF

$$\underset{\text{RZSF}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{ZSF}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{RZSF}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{/}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underset{/}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{/}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{RZSF}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{RZSF}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Eindeutigkeit

Frage: Wenn eine Matrix durch elem. Zeilenumformungen auf ZSF (oder RZSF) gebracht wird, ist das Ergebnis eindeutig bestimmt?

→ Nein, z.B. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \mapsto z_1 - z_2} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ haben beide ZSF

Aber: "Form" der ZSF ist eindeutig (Anzahl + Position der führenden Einsen)

RZSF ist eindeutig bestimmt: Ist A eine Matrix und sind B, B' Matrizen in RZSF, die beide aus A durch elem. Zeilenumf. hervorgehen, dann gilt $B = B'$.

Satz 5.17 im Skript

Der Gauß-Algorithmus
Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

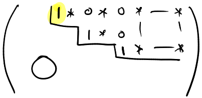
Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Der Gauß-Algorithmus

I, II, III



Satz

Jede Matrix A lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform bringen.

Beweis durch Induktion nach Anzahl der Zeilen.

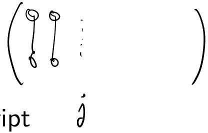
IA [0 Zeilen ✓]

1 Zeile: $(0 \cdots 0 \; a \; * - *) \xrightarrow{z_1 \rightsquigarrow a^{-1} z_1} (0 \cdots 0 \; 1 \; * \cdots - *)$ RZSF $\quad a \in K, a \neq 0$

oder $(0 \;\text{———}\; 0)$ RZSF

IS > 1 Zeile ⊛ Sei j der kleinste Spaltenindex, so dass die Spalten $1, \ldots, j-1$ alle Nullspalten sind, aber Spalte j keine Nullspalte ist,

Sei i so gewählt, dass $a_{ij} \neq 0$



⊛ OE A nicht die Nullmatrix

Dann $\underbrace{Z_i \leftrightsquigarrow Z_1}$, $\underbrace{Z_1 \rightsquigarrow a^{-1} Z_1}$, wobei a der Eintrag $\neq 0$ der ersten Zeile, der am weitesten links steht (in Spalte j)

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|cccc} & \overset{a}{\neq 0} & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & * & & \cdots & * \end{array}\right) \\ \underbrace{\quad}_{1\cdots j-1} \ \ \uparrow_{j} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & * & & \cdots & * \end{array}\right)$$

Jetzt $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 - a_{2j} Z_1$, $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - a_{3j} Z_1$, ...

Erhalte

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right) \xrightarrow[\text{es ex. elem Zeilenumf}]{\text{IV}} \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & \boxed{*} & * & * & \\ & & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \vdots & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & 0 & & 0 & & & \end{pmatrix}}_{\text{ZSF}} \xrightarrow{\text{Umf vom Typ I}} \text{RZSF}$$

Quiz

Bringen Sie die folgenden Matrizen auf Zeilenstufenform:

über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

über $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 1+i \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 \rightsquigarrow z_3 - 7z_1]{z_2 \rightsquigarrow z_2 - 4z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 \rightsquigarrow -\frac{1}{3} z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 \rightsquigarrow z_3 + 6z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \rightsquigarrow z_1 - 2z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ZSF

$$\frac{1}{i}+\frac{i}{i} = -i + 1 = 1-i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 1+i \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \leftrightsquigarrow z_3} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \rightsquigarrow \frac{1}{i} z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{i} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ZSF}$$

$$\xrightarrow{z_1 \rightsquigarrow z_1 - \frac{1+i}{i} z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ RZSF}$$

Lösungsmenge eines Gleichungssystems „in Zeilenstufenform“ Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Lösungsmenge eines LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix in RZSF

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \in K^m \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & \boxed{0} & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

frei wählbar
(Spalten <u>ohne</u> führende 1)

$$\begin{aligned} x_1 + a x_2 + \qquad b x_4 &= c \\ x_3 + d x_4 &= e \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= c - a x_2 - b x_4 \\ x_3 &= e - d x_4 \end{aligned}$$

falls "nur" ZSF statt RZSF, dann kann x_3 in 1. Gleichung auftreten

x_1, x_3 sind durch x_2, x_4 eindeutig bestimmt
Für x_2, x_4 gibt es keine weiteren Bedingungen

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} c - a x - b x' \\ x \\ e - d x' \\ x' \end{pmatrix} ; x, x' \in K \right\}$$

Abschnitt 5.2.2 im Skript

Variante

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & & 1 & \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} c - ax - bx' \\ x \\ e - dx' \\ x' \end{pmatrix} ; \; x, x' \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -d \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x, x' \in K \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\{ x \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -d \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x, x' \in K \right\}}_{= \text{Lösungsmenge des zugeh. homogenen LGS}}$$

Abschnitt 5.2.2 im Skript

Quiz

Geben Sie die Lösungsmenge des LGS mit der folgenden erw. Koeffizientenmatrix an:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & - & - & & & & x_7 \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$\uparrow \;\hat{=}\;$ frei wählbar

$$
\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x'' \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; x, x', x'' \in K \right\} \subseteq K^7
$$

Folgerungen

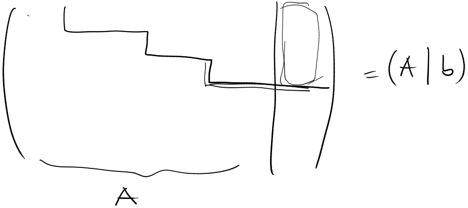
$(A \mid b)$ in RZSF

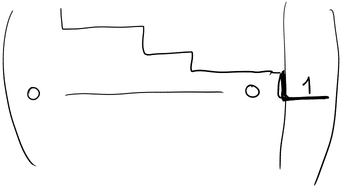
Es sind äquivalent:

(i) Das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS ist lösbar

(ii) Die Matrizen A und $(A|b)$ haben gleich viele Stufen.

gleich viele Stufen





nicht gleich viele Stufen in A, (A|b)

$(A \mid b)$ in RZSF, sei lösbar.

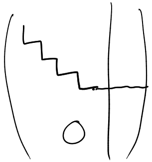
Es sind äquivalent:

(i) Das durch $(A \mid b)$ gegebene lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung.

(ii) Die Matrix A hat in jeder Spalte eine Stufe.

Begr: eind lösbar $\iff$ keine frei wählbaren Unbestimmten

$\iff$ keine Spalte ohne Stufe



$(A \mid b)$ in RZSF, sei lösbar.

Es sind äquivalent:

(i) Das durch $(A \mid b)$ gegebene lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung.

(ii) Die Matrix A hat in jeder Spalte eine Stufe.

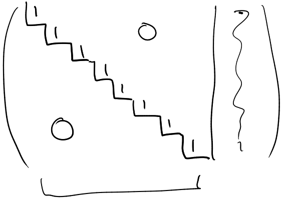
Sei nun in der obigen Situation $A \in M_n(K)$ *quadratisch*.

Dann sind äquivalent:

(i) Das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS ist eindeutig lösbar.

(ii) $A = E_n$

Insbesondere ist diese Eigenschaft unabhängig von b.



A quadratisch

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Folgerungen

Sei $A \in M_n(K)$ eine *quadratische* Matrix. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $b \in K^n$ ist das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS eindeutig lösbar.

(ii) Für alle $b \in K^n$ ist das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS lösbar.

(iii) Es existiert $b \in K^n$, so dass das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS eindeutig lösbar ist.

(iv) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist E_n.

Beweis (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) siehe oben, (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial

bleibt zu zeigen: (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Wir zeigen: Wenn $(A|0)$ nicht eindeutig lösbar ist, dann ex $b \in K^n$ s.d. $(A|b)$ unlösbar ist.

Wenn $(A|0)$ nicht eind. lösbar, dann hat die RZSF von A eine Nullzeile

Folgerungen

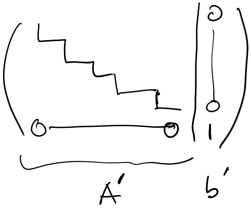
Sei $A \in M_n(K)$ eine *quadratische* Matrix. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $b \in K^n$ ist das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS eindeutig lösbar.

(ii) Für alle $b \in K^n$ ist das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS lösbar.

(iii) Es existiert $b \in K^n$, so dass das durch $(A \mid b)$ gegebene LGS eindeutig lösbar ist.

(iv) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist E_n.



Fortsetzung: $\longrightarrow$ RZSF A' von A hat Nullzeile

$\Rightarrow$ es existiert $b' \in K^n$ s.d. $(A' \mid b')$ unlösbar

Können A aus A' durch elem. Zeilenumformungen erhalten.

Wenn wir genau diese Zeilenumformungen anwenden auf $(A' \mid b')$,

so erhalten wir ein unlösbares LGS $(A \mid b)$, $b \in K^n$.

Teilräume von K^n
Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition Teilraum

K ein Körper, $n \geq 0$.

Definition Eine Teilmenge $U \subseteq K^n$ heißt Teilraum, wenn

(a) $0 = (0, \ldots, 0)^t \in U$

(b) Für alle $v, w \in U$ gilt: $v + w \in U$, und

(c) Für alle $v \in U$ und $a \in K$ gilt $a \cdot v \in U$.

Beispiel

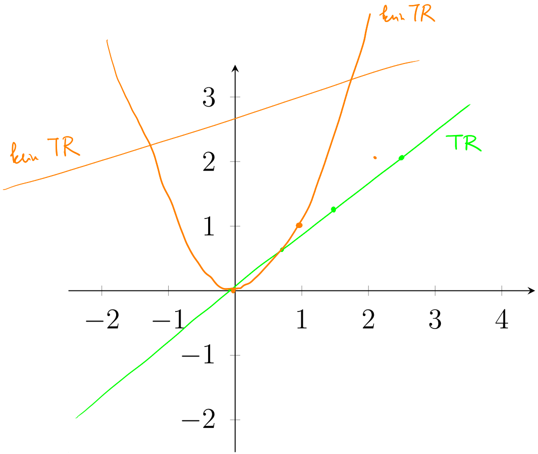
- $K^n \subseteq K^n$ ist ein Teilraum
- $\{0\} \subseteq K^n$ ist ein Teilraum ("der triviale Teilraum")

Definition 5.23 im Skript

Teilräume von $\mathbb{R}^2$

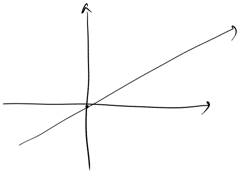
$\{0\}$, $\mathbb{R}^2$

und alle Geraden durch den Ursprung



später:

dies sind alle TR in $\mathbb{R}^2$, es gibt keine anderen



$\mathbb{R}^3$

$\{0\}$, $\mathbb{R}^3$

Geraden durch Ursprung

Ebenen, die den Ursprung enthalten

Teilräume und LGS

<u>Lemma</u> Sei $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge eines <u>homogenen</u> linearen Gleichungssystems (mit n Unbestimmten). Dann ist $\mathbb{L} \subseteq K^n$ ein Teilraum.

<u>Beweis</u> Sei $A = (a_{ij})$ die Koeffizientenmatrix des homog. LGS.

Wir überprüfen die Teilraumbedingungen:

i

$j = 1, \ldots, n$

(a) $0 \in \mathbb{L}$ ✓

(b) Seien $v = (v_j)_j$, $w = (w_j)_j \in \mathbb{L}$. z.z.: $\underset{(v_j + w_j)_j}{\overset{\parallel}{v+w}} \in \mathbb{L}$

Tatsächlich gilt $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, (v_j + w_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j}_{} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}_{} = 0$$

(c) Ähnlich, aber noch einfacher.

Abschnitt 5.2.3 im Skript

Quiz

Welche der folgenden Teilmengen ist ein Teilraum?

(1) $K = \mathbb{Q}$, $\{(x_1, \dots, x_n)^t \in K^n;\ \sum_{i=1}^n ix_i = 0\}$, ✓ (Lösungsmenge des homog LGS $\sum_{i=1}^n i x_i = 0$)

(2) $K = \mathbb{R}$, $\{(x_1, x_2)^t \in K^2;\ x_2 = x_1^2\}$, $\ni (1,1)$, $\not\ni (2,2)$ kein TR

(3) $K = \mathbb{R}$, $\{(x_1, \dots, x_n)^t \in K^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$, $= \{0\}$ ✓

(4) $K = \mathbb{C}$, "U_4" $\{(x_1, \dots, x_n)^t \in K^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$,

$\underline{n=1}$ $\{0\}$ ✓

$\underline{n>1}$ $(1, i, 0 \dots 0), (1, -i, 0 \dots 0) \in U_4$

$(2, 0, 0 \dots 0) \notin U_4 \Rightarrow U_4$ kein TR

(5) $K = \mathbb{F}_2$, $\{(x_1, \dots, x_n)^t \in K^n;\ \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i^2}_{= x_i} = 0\}$,

TR, weil Lösungsmenge von $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Das Matrizenprodukt
Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Addition von Matrizen und Skalarmultiplikation

K Körper

$m, n \in \mathbb{N}$

Addition $\quad + : M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$

$$(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

assoziativ, kommutativ

neutrales Element

0 Nullmatrix

additive Inverse

$A = (a_{ij})_{i,j}$

$-A := (-a_{ij})_{i,j}$

$\Rightarrow A + (-A) = 0$

Skalarmultiplikation $\quad \cdot : K \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$

$$a \cdot (a_{ij})_{i,j} := (a a_{ij})_{i,j}$$

$$1 \cdot A = A$$

$$(ab) A = a(bA)$$

(schreibe auch Aa statt aA)

Abschnitt 5.3 im Skript

Das Matrizenprodukt

$\ell, m, n \in \mathbb{N}$

$$\cdot : M_{\ell \times m}(K) \times M_{m \times n}(K) \longrightarrow M_{\ell \times n}(K)$$

$$A = (a_{ij}) \in M_{\ell \times m}(K), \qquad B = (b_{jk}) \in M_{m \times n}(K)$$

Dann ist $AB = C$ mit $(c_{ik})_{i,k}$, $\quad c_{ik} := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \bullet & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \bullet & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \bullet & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

k-te Spalte

i-te Zeile $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{\ell 1} & \cdots & a_{\ell m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ik} & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$C = AB$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \in M_{1\times 1}(K) = K^1 = K$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Matrizenprodukts

Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$

Distributivgesetze: $(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC$

Matrizenprodukt nicht kommutativ: in der Regel $AB \neq BA$

Es gibt Matrizen $A \in M_n(K)$, $A \neq 0$, mit $\underset{\overset{\|}{AA}}{A^2} = 0$

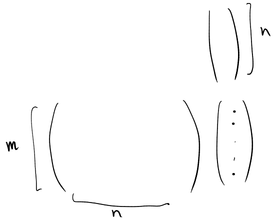
Das Matrizenprodukt und LGS

Betrachte LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $b \in K^m$

Für $x = (x_j)_j \in K^n$ gilt (mit der Konvention $K^n = M_{n\times 1}(K)$)

$Ax \in K^m$ Spaltenvektor mit Einträgen $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}$ in i-ten Zeile

die linke Seite der Gleichungen des zugeh. LGS



$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{ x \in K^n \, ; \, Ax = b \}$$

Das Matrizenprodukt und elementare Zeilenumformungen

(I) $A \xrightarrow[i \neq j,\ a \in K^\times]{z_i \rightsquigarrow z_i + a z_j} A'$, dann $A' = E_{ij}(a)\, A$

$A \in M_{m \times n}(K)$

$$E_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in M_m(K)$$

(sonst 0)

Eintrag a in Zeile i, Spalte j

(II) $A \xrightarrow[(i \neq j)]{z_i \leftrightarrow z_j} A' \rightsquigarrow A' = P_{ij} A$,

$$\begin{array}{cc} P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } i \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{Spalte } i & & j \end{array} & \end{array}$$

Das Matrizenprodukt und elementare Zeilenumformungen

III $\quad A \xrightarrow[a \in K^\times]{Z_i \mapsto aZ_i} A'$, dann

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{Spalte } i \end{array} A \quad \leftarrow \text{Zeile } i$$

$$=: \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{a}, 1, \dots, 1)$$

Die transponierte Matrix, spezielle Matrizen

Vorlesungswoche 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die transponierte Matrix

$$(1,2,3,4)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in K^4$$

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M_{m \times n}(K)$

Dann heißt $A^t = (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n \times m}(K)$

die zu A transponierte Matrix

Abschnitt 5.3.1 im Skript

QUIZ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

allgemein

$$(A^t)^t = A$$

A, B Matrizen, s.d. AB existiert

$$\Rightarrow \quad B^t A^t = (AB)^t$$

Spezielle Matrizen

(hier alle Matrizen quadratisch $\in M_n(K)$)

Obere Dreiecksmatrix:

$A = (a_{ij})_{i,j}$

$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(1,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix

$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Abschnitt 5.3.2 im Skript

Blockmatrizen

$$\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in M_{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)}(K)$$

$$\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array}$$

zusammengesetzt aus

$A \in M_{m_1 \times n_1}$

$B \in M_{m_1 \times n_2}$

$C \in M_{m_2 \times n_1}$

$D \in M_{m_2 \times n_2}$

Verträglich mit Matrizenprodukt

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)}_{m_1 \quad m_2} \cdot \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)\begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$

Abschnitt 5.3.2 im Skript