Zusammenfassung und Wiederholung
Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Zusammenfassung

1. Gruppen, Körper, Vektorräume
2. Basen und Dimension
3. Lineare Abbildungen
4. Determinante, Eigenwerte

„Special topics“

Lineare Abbildungen und Matrizen, Basiswechsel

Invertierbare Matrizen und Isomorphismen

Klausurvorbereitung

- Hausaufgaben, Online-Aufgaben
- Probeklausur
- Aufgaben zur Klausurvorbereitung
- Fragestunde, Globalübung (Mo, 8.2., 14:15h und Mi, 10.2., 12:15h)
- LA-Overflow-Forum auf der Moodle-Seite

Zusammenfassung:
Gruppen, Körper, Vektorräume
Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Verknüpfungen

Sei M eine Menge. Eine Verknüpfung auf M ist eine Abbildung

$$M \times M \longrightarrow M, \qquad (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

Eigenschaften von Verknüpfungen:

- Assoziativität, für alle $a,b,c \in M$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Neutrales Element: es existiert $e \in M$ so dass für alle $a \in M$: $a \cdot e = a = e \cdot a$.

  (dann: e eindeutig bestimmt)

  - Inverse Element: für jedes $a \in M$ existiert $b \in M$ s.d. $a \cdot b = e = b \cdot a$.

    (dann: jedes Elem. besitzt genau ein inverses Elem.)
- Kommutativität: für alle $a, b \in M$ gilt: $a \cdot b = b \cdot a$.

Gruppen

Def Eine <u>Gruppe</u> ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$, die assoziativ ist, ein neutrales Element besitzt, und so dass für jedes $g \in G$ ein inverses Element existiert.

Ist die Verknüpfung zusätzlich kommutativ, so spricht man von einer <u>kommutativen</u> (oder: <u>abelschen</u>) Gruppe.

Bsp

- $(\mathbb{Z}, +)$ ab. Gruppe.
- $GL_n(K) = \{A$ invertierbare $(n \times n)$-Matrizen über $K\}$ $(K$ Kp., $n \in \mathbb{N})$ mit Produkt von Matrizen.
- die symmetrische Gruppe $(n \in \mathbb{N})$ $S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv $\}$ mit Verkettung von Abbildungen.

i.a. nicht kommutativ

Abschnitt 8.1 im Skript

Gruppenhomomorphismen, Untergruppen

Def. Seien G, H Gruppen. Eine Abbildung $f: G \to H$ heißt ein <u>Homomorphismus</u>, wenn $f(g \cdot g') = f(g) \cdot f(g')$ für alle $g, g' \in G$

Def. Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt <u>Untergruppe</u>, wenn

- $H \neq \emptyset$
- für alle $h, h' \in H$ gilt $hh' \in H$
- für alle $h \in H$ gilt $h^{-1} \in H$.

$\Rightarrow$ neutr. Elem. von G liegt in H, H ist selbst eine Gruppe

Bsp Ist $f: G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann sind

$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{1_H\}) \subseteq G$ und $\mathrm{Im}(f) \subseteq H$ Untergruppen.

neutr. Elem. von H

Abschnitt 8.1 im Skript

Körper

Def Ein **Körper** ist eine Menge zusammen mit Verknüpfungen

$+ : K \times K \longrightarrow K$ (Addition), $\quad \cdot : K \times K \longrightarrow K$ (Multiplikation),

so dass gilt

- $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutr. Elem. 0
- $(\underbrace{K \setminus \{0\}}_{=: K^\times}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe [mit neutr. Element 1]
- Distributivgesetz: für alle $a, b, c \in K$ gilt
  $(a+b) \cdot c = ac + bc$

Kapitel 4 im Skript

Beispiele für Körper

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \{ a+bi \,;\, a,b \in \mathbb{R} \}$

  $i^2 = -1$

- p Primzahl $\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}_p = \{ \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1} \}$ "Restklassen modulo p"

- ...

Abschnitte 4.1, 4.2 im Skript

Vektorräume

Sei K ein Körper

Def. Ein Vektorraum über K ist eine Menge V zusammen mit Verknüpfungen

$+ : V \times V \longrightarrow V$ (Addition), $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ (Skalarmultiplikation)

so dass gilt

- $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe
- für alle $a, b \in K$, $v, w \in V$ gilt
  - $(ab) \cdot v = a(bv)$
  - $1 \cdot v = v$
  - $(a+b)v = av + bv$, $a(v+w) = av + aw$.

Bsp. K^n mit komponentenweiser Addition, Skalarmult.

Abschnitt 6.1 im Skript

VR-Homomorphismen, Untervektorräume

K Körper

Def. Seien V, W Vektorräume über K.

Ein Homomorphismus von VR (oder: eine lineare Abbildung) ist eine Abbildung $f: V \to W$, so dass

- $f(v+v') = f(v) + f(v')$ für alle $v, v' \in V$ ($\Leftrightarrow$ f Gruppenhomom. zwischen $(V,+)$, $(W,+)$.)
- $f(av) = a \cdot f(v)$ für alle $a \in K$, $v \in V$.

Abschnitt 6.1 im Skript

VR-Homomorphismen, Untervektorräume

Def. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt <u>Untervektorraum</u>, wenn gilt:

- $U \neq \emptyset$,
- für alle $u, u' \in U$: $u + u' \in U$
- für alle $a \in K$, $u \in U$: $a u \in U$.

Bsp Ist $f: V \to W$ eine lineare Abb., so sind

$$\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \subseteq V \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(f) \subseteq W \quad \text{Untervektorräume.}$$

„Nullvektor" $\in W$

Abschnitt 6.1 im Skript

Zusammenfassung: Basen und Dimension Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Seien K ein Körper, V ein Vektorraum über K, $v_1, \ldots, v_n \in V$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f} & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ x = (x_1, \ldots, x_n)^t & \longmapsto & \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i v_i}_{\text{„Linearkombination der } v_i\text{"}} \in V \end{array}$$

Koeffizienten

ein VR-Homomorphismus

Erzeugendensysteme

K, V VR$/K$, $v_1, \ldots, v_n \in V$

$$f: K^n \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto \sum x_i v_i$$

Def (1) $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle := \mathrm{Im}(f) = \{$Menge aller LK der $v_1, \ldots, v_n\}$

heißt der von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugte Untervektorraum

(2) Wir sagen, dass $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist,

wenn $\underbrace{\langle v_1, \ldots, v_n \rangle}_{\mathrm{Im}(f)} = V$. (Äquivalent: f surjektiv)

Abschnitt 6.2 im Skript

Lineare Unabhängigkeit

K, V VR$/K$, $v_1, \ldots, v_n \in V$

$$f : K^n \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto \sum x_i v_i$$

Def. Die Familie $v_1, \ldots, v_n$ heißt linear unabhängig, wenn die folgenden äquiv. Bedingungen erfüllt sind:

(i) f injektiv ($\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0$)

(ii) Für jedes $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sind die Koeff. der Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ eind. bestimmt.

$v = 0$

(iii) Nur für $x_1 = \ldots = x_n = 0$ gilt $\sum x_i v_i = 0$.

Abschnitt 6.3 im Skript

Basen

K, V VR$/K$, $v_1, \dots, v_n \in V$

$f : K^n \longrightarrow V$

$x \longmapsto \sum x_i v_i$

Def. Die Familie $v_1, \dots, v_n$ heißt eine Basis von V, wenn die folgenden äquiv. Bedingungen gelten

(i) f ist bijektiv

(ii) $v_1, \dots, v_n$ ist linear unabh. ES

(iii) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als LK von $v_1, \dots, v_n$ schreiben.

(iv) $v_1, \dots, v_n$ ist minimales ES

(v) $v_1, \dots, v_n$ ist maximale linear unabh. Familie von Vektoren.

Abschnitt 6.4 im Skript

Die Dimension eines Vektorraums

"V endlich erzeugt"

$\parallel$

V endlichdimensional

<u>Thm.</u> Sei V ein K-VR, der ein endliches ES besitzt.

Dann besitzt V eine Basis.

Genauer gilt dann: Jedes linear unabh. System von Vektoren lässt sich zu einer Basis ergänzen.

<u>Thm</u> Sei V ein endlich erzeugter K-VR. Dann haben je zwei Basen von V gleich viele Elemente. Diese Anzahl der Elemente in einer Basis heißt die <u>Dimension</u> von V.

Kapitel 6.4 im Skript

Zusammenfassung:
Lineare Abbildungen
Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Vektorraumhomomorphismen

K Körper, V, W K-VR

Def Eine lineare Abbildung (oder: VR-Homomorphismus) zwischen V und W ist eine Abbildung $f: V \to W$, so dass

- $f(v+v') = f(v) + f(v')$ für alle $v, v' \in V$,
- $f(av) = a f(v)$ für alle $a \in K$, $v \in V$.

($\rightsquigarrow$ $f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i)$)

- Endomorphismus: $V \to V$
- Isomorphismus: $V \xrightarrow[\sim]{f} W$
  $\Leftrightarrow$ es ex. Umkehrhomom. $W \xrightarrow{g} V$, $g \circ f = \mathrm{id}_V$, $f \circ g = \mathrm{id}_W$
- Automorphismus $V \xrightarrow{\sim} V$

Beispiel $c_{\mathcal{B}}: V \to K^n$ Koordinatenisom. zu Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V, $b_i \mapsto e_i$.

Abschnitt 7.1 im Skript

Kern und Bild, Dimensionsformel

$f: V \to W$ Homomorphismus

Kern von f: $\quad \mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V;\ f(v) = 0 \} = f^{-1}(\{0\}) \subseteq V \quad$ UVR

Bild von f: $\quad \mathrm{Im}(f) = \{ f(v);\ v \in V \} \subseteq W \quad$ UVR

<u>Thm</u> (Dimensionsformel für lineare Abbildungen) Sei V ein endlichdimensional, $f: V \to W$ ein VR-Homomorphismus.

Dann gilt
$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$$

f surjektiv $\Leftrightarrow$

<u>Korollar</u> Falls $\dim V = \dim W < \infty$, so folgt:

$$\mathrm{Ker}(f) = 0 \iff \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V = \dim W \iff \mathrm{Im}(f) = W$$

f injektiv $\Leftrightarrow$

Abschnitt 7.1 im Skript

Lineare Abbildungen und Matrizen

$V \xrightarrow{f} W$ Homom. zwischen endl.-dim'l VR $\rightsquigarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

darstellende Matrix.

Basen $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$

Abschnitt 7.3 im Skript

Zusammenfassung: Determinante und Eigenwerte Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die Determinante einer Matrix

K Körper, $n \in \mathbb{N}$

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K, \qquad A \mapsto \det(A)$$

- alternierend multilinear in den Spalten,
- $\det(E_n) = 1$

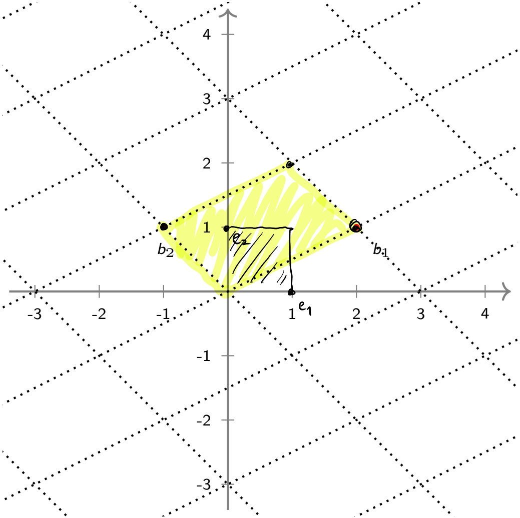
} det ist die eind. bestimmte Abb. mit diesen Eigenschaften

- Leibniz-Formel $\quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

Abschnitt 9.1 im Skript

Die Determinante und Flächeninhalte/Volumina

$K = \mathbb{R}$



$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 3$

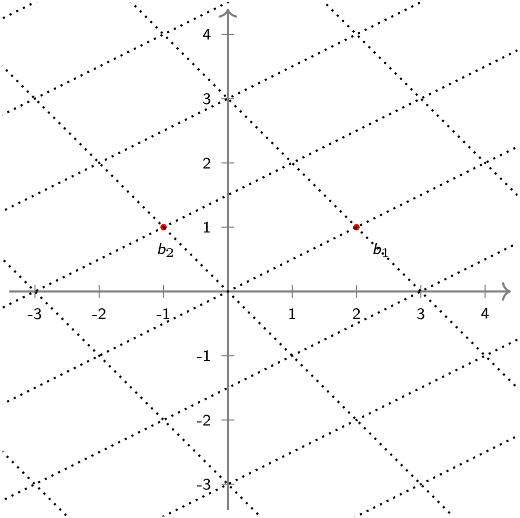
$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

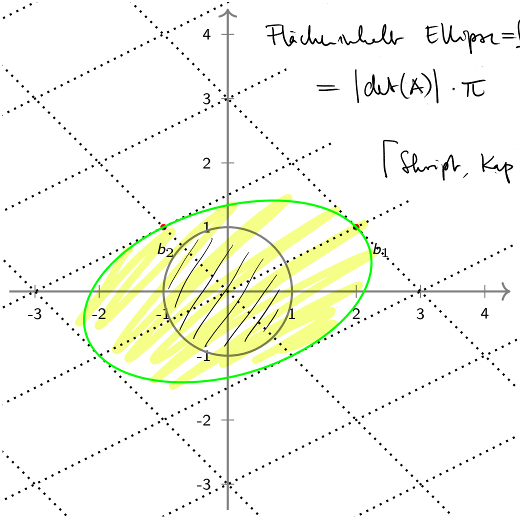
$e_1 \longmapsto b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2 \longmapsto b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Eckpunkten $0, b_1, b_2, b_1+b_2$ ist $= |\det(A)|$

Die Determinante und Flächeninhalte/Volumina





Flächeninhalt Einheitskreis B

$= \pi$

Flächeninhalt Ellipse $= f_A(B)$

$= |\det(A)| \cdot \pi$

[Skript, Kap 11]

Eigenschaften der Determinante

- Verhalten bei elementaren Spaltenumformungen.

- Produktsatz $\quad \det(AB) = \det(A)\det(B), \quad A, B \in M_n(K),$

  insbes.: $\quad A$ invertierbar $\iff \det(A) \neq 0$ und in diesem Fall gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

  Folgerung: $\quad A \in M_n(K), \; S \in GL_n(K) \Rightarrow \det(SAS^{-1}) = \det(A).$

- $\det(A^t) = \det(A) \quad \rightsquigarrow$ Verhalten bei elem. Zeilenumformungen

Abschnitte 9.1, 9.3 im Skript

Die Determinante eines Endomorphismus

K Körper, V endlichdim'l VR
$n = \dim(V)$

$f : V \to V$ Endomorphismus.

$\mathcal{B}$ Basis $\rightsquigarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(K)$

$\mathcal{B}'$ $\quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}_{= \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$ $\quad$ "SAS^{-1}"

zueinander konjugiert
$\Rightarrow$ dieselbe Determinante

Def $\quad \det(f) := \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\right)$ Determinante von f $\quad$ ($\mathcal{B}$ Basis von V, $\det(f)$ unabh. von der Wahl von $\mathcal{B}$)

Abschnitt 9.2 im Skript

Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

K Körper,

V VR/K (endlichdimensional)

$f: V \to V$ Endomorphismus

<u>Def</u> (1) Ein Elem. $v \in V \setminus \{0\}$ heißt <u>Eigenvektor</u> von f zum <u>Eigenwert</u> $\lambda \in K$, wenn

$$f(v) = \lambda v$$ gilt.

(2) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f (d.h.: es ex. EV zum EW λ), dann heißt $V_\lambda(f) = \{v \in V;\ f(v) = \lambda v\} \subseteq V$ (UVR)

der Eigenraum von f zum Eigenwert λ.

Abschnitt 10.1 im Skript

Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

<u>Satz</u> Sind $v_1, \ldots, v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu paarw. versch. Eigenwerten, dann sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

Abschnitt 10.1 im Skript

Diagonalisierbarkeit

K, V endlichdim'l, $f : V \to V$

Def (1) f heißt diagonalisierbar, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, die aus Eigenvektoren von f besteht (äquiv.: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ Diagonalmatrix)

(2) Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt diagonalisierbar, wenn die zugeh. lin. Abb. $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$, diagonalisierbar ist.
(Äquiv.: es ex. $S \in GL_n(K)$ mit SAS^{-1} Diagonalmatrix.)

Kapitel 10 im Skript

Wiederholung Basiswechsel
Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Beschreibung von Vektoren durch ihre Koordinatenvektoren

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.

Dann existieren für jedes $v \in V$ eind. bestimmte $a_i \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Mit anderen Worten: die Abb. $K^n \longrightarrow V$, $(a_1, \ldots, a_n)^t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ ist bijektiv.

Die Umkehrabbildung $c_{\mathscr{B}} : V \longrightarrow K^n$ heißt der Koordinatenisomorphismus.

Also $c_{\mathscr{B}}(v) = (a_1, \ldots, a_n)^t \iff v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Quiz

Sei $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $\mathscr{B}$ die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Koordinatenvektor $c_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Quiz

Sei $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $\mathscr{B}$ die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Koordinatenvektor $c_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 - \frac{1}{2} b_3$

Beschreibung linearer Abbildungen durch die Werte auf einer Basis

K Körper, V, W VR über K,

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.

__Satz__. Sind $w_1, \ldots, w_n \in W$, dann gibt es __genau eine__ lineare Abb.
$f: V \longrightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(b_j) = w_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Quiz

Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ linear, $\overset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\overset{b_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$.

$\mathcal{B}' = (b_1', b_2')$

Sei $g\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ linear, $\overset{b_1'}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\overset{b_2'}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $g\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$.

Quiz

Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ linear, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = f\left(1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

f linear, $\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Sei $g\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ linear, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $g\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = g\Bigg(\underbrace{1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} + 1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}_{=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}\Bigg) = 1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{=\,g\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)} + 1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}}_{=\,g\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$

Die darstellende Matrix eines Homomorphismus

V, W VR$/K$

$$V \xrightarrow{f} W$$

$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ $\quad$ $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$

Dann f eind. bestimmt durch $f(b_1), \ldots, f(b_n)$,

und jedes $\underset{\in W}{f(b_j)}$ eind. bestimmt durch

$$c_{\mathcal{C}}(f(b_j)) \in K^m$$

Wir definieren $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{m \times n}(K)$ als die Matrix mit Spalten

$$c_{\mathcal{C}}(f(b_1)), \ldots, c_{\mathcal{C}}(f(b_n)),$$

und nennen diese Matrix die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

Wir erhalten:

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(K)$$
$$f \longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

Isomorphismus von K-Vektorräumen

Die darstellende Matrix eines Homomorphismus

Wir erhalten: $\quad \mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$ $\quad$ Isomorphismus von K-Vektorräumen

$$f \longmapsto M^{B}_{e}(f)$$

Umkehrabbildung: $\quad A \in M_{m\times n}(K) \rightsquigarrow$

Isomorphismus

$$\begin{tikzcd}
V & W \arrow[d, shift left, "c_e^{-1}"', bend left=60] \\
K^n \arrow[u, leftarrow, "c_B", "\cong"'] \arrow[r, "f_A"] & K^m \arrow[u, leftarrow, "c_e"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto Ax$$

Dann entspricht der Matrix A die Abbildung $c_e^{-1} \circ f_A \circ c_B$.

Verkettung von Abbildungen

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W \qquad \text{VR-Homomorphismen}$$

Basen: $\quad \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \qquad \mathcal{C}$

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g)$$

<u>Speziell</u> $\quad f : V \to W$ Isomorphismus mit Umkehrabbildung f^{-1}, ($n = m$)

$\qquad\quad \mathcal{B} \quad \mathcal{C}$

dann $\quad E_m = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\underbrace{f \circ f^{-1}}_{= \mathrm{id}_W}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\, M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \implies M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^{-1} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

Basiswechsel

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$\mathcal{B} \qquad \mathcal{C}$$

$$(b_1', \dots, b_n') = \mathcal{B}' \qquad \mathcal{C}'$$

Denn $\quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = \underline{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)}\; M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\; \underline{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)}$

$$f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$$

Basiswechselmatrix

$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} := M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$, invertierbar,

$$\left(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$$

j-te Spalte von $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ ist $c_{\mathcal{B}}(b_j')$.

Quiz

Sei V ein Vektorraum und seien $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ Basen von V. Sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus und $g \colon V \to V$ ein Automorphismus. Füllen Sie die Lücken.

$$M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(g \circ f \circ g^{-1}) = M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(g) \cdot M^{\mathscr{D}}_{\mathscr{B}}(f) \cdot M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{D}} \cdot \underbrace{M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{A}}(g)^{-1}}_{= M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{C}}(g^{-1})}$$

$$\| $$

$$M(g)\ M(f)\ M(g^{-1})$$

Quiz

Seien $\mathscr{B}$ bzw. $\mathscr{B}'$ die Basen von $\mathbb{Q}^3$, die aus den Spalten der folgenden Matrizen bestehen:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B' = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1' & b_2' & b_3' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Sei $\mathscr{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$ und sei $\mathscr{C}$ die Basis, die aus $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ besteht.

Gegeben ist $f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ mit

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{E}}(f)$.

Quiz

Seien $\mathscr{B}$ bzw. $\mathscr{B}'$ die Basen von $\mathbb{Q}^3$, die aus den Spalten der folgenden Matrizen bestehen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathscr{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$ und sei $\mathscr{C}$ die Basis, die aus $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ besteht.

Gegeben ist $f \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ mit

$$M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}'}(f) = M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{C}} \; M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) \; M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

Berechnen Sie $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}'}(f)$.

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}'}(f) = M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{C}} \; M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) \; \underbrace{M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} \; M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}'} = \Big(\underbrace{M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}}_{B}\Big)^{-1} \; \underbrace{M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}'}}_{B'}$$

$\mathcal{E}_3$ Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{E}}(f) = M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{E}}\ M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)\ M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}$$

$\mathscr{B} =$

$$M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{B}' =$

$$\left(M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{E}_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}} = M^{\mathscr{E}_3}_{\mathscr{B}}\ M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ \underbrace{-4} & -12 & -7 \end{pmatrix}$$

Konkret

$$b_1' = b_1 + b_3 \overset{f}{\longmapsto} \underbrace{(3c_1 + c_2)}_{f(b_1)} + \underbrace{(c_1 + 3c_2)}_{f(b_3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$b_2' = \qquad \longmapsto \qquad = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$b_3' = \qquad \longmapsto \qquad = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Wiederholung Invertierbarkeit
Vorlesungswoche 13

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Invertierbare Matrizen, invertierbare Homomorphismen

K Körper

$A \in M_n(K)$ invertierbar: es ex. $B \in M_n(K)$ mit $AB = BA = E_n$.

$\underbrace{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)}$ invertierbar/Isomorphismus $\iff$ es ex. Homomorphismus $g : W \to V$, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_V \quad \text{und}$$

$$f \circ g = \mathrm{id}_W$$

(schreibe $V \cong W$)

$f : V \to W$
VR-Homomorphismus

$$V \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} W$$

(i) A ist invertierbar.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ und (iii)

(ii) Es existiert $B \in M_n(K)$ mit $AB = E_n$.

(iii) Es existiert $B \in M_n(K)$ mit $BA = E_n$.

(iv) Der Homomorphismus $\mathbf{f}_A$ ist ein Isomorphismus.

$f_A : K^n \to K^n$,
$x \mapsto Ax$

(v) Der Homomorphismus $\mathbf{f}_A$ ist surjektiv.

(vi) Der Homomorphismus $\mathbf{f}_A$ ist injektiv.

$(iv) \Leftrightarrow (v)$ und (vi)

(vii) Für jedes $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar.

(viii) Für jedes $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar.

$(vii) \Leftrightarrow (viii)$ und (ix)

(ix) Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ ist eindeutig lösbar.

(x) Die reduzierte Zeilenstufenform der Matrix A ist E_n.

(xi) Es gilt $\det(A) \neq 0$.

Quiz

$A \in M_n(K)$, $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$

Zeigen Sie die Äquivalenzen

(v) Der Homomorphismus $\mathbf{f}_A$ ist surjektiv.

(vi) Der Homomorphismus $\mathbf{f}_A$ ist injektiv.

(Allgemeiner für $f: V \to W$ Homom. zwischen endlichdim'l VR V, W derselben Dimension.)

Dimensionsformel: $\dim \operatorname{Ker}(f_A) + \dim(\operatorname{Im}(f_A)) = \dim K^n = n$,

also $\dim \operatorname{Ker}(f_A) = 0 \iff \dim(\operatorname{Im}(f_A)) = n$,

das bedeutet $\underbrace{\operatorname{Ker}(f_A) = 0}_{f_A \text{ injektiv}} \iff \underbrace{\operatorname{Im}(f_A) = K^n}_{f_A \text{ surjektiv}}$

und

(viii) Für jedes $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar.

(ix) Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ ist eindeutig lösbar.

(viii) $\iff$ in der RZSF von A gibt es keine Nullzeile

$\overset{A \text{ quadratisch}}{\iff}$ in jeder Spalte der RZSF von A steht eine "führende Eins" $\iff$ (ix)

Quiz: Injektiv, surjektiv, ...

(zwischen endlich dim'l VR V, W).

Sei $f\colon V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus. Zeigen Sie:

- f injektiv $\iff$ es existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

'$\Leftarrow$' einfach.

'$\Rightarrow$' Weil f injektiv ist, induziert f einen Isomorphismus $\tilde{f}\colon V \to \mathrm{Im}(f)$, $v \mapsto f(v)$

Sei $W' \subseteq W$ ein Komplement von $\mathrm{Im}(f)$.

Definiere $g\colon W = \mathrm{Im}(f) \oplus W' \to V$ durch $g(w''+w') :=$ das eind. best. Elt $v \in V$ mit $f(v) = w''$.

$w = w'' + w'$

m.a.W.: $g|_{\mathrm{Im}(f)} = \tilde{f}^{-1}$

$g|_{W'} = 0$ Nullabbildung

Überprüfe $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

- f surjektiv $\iff$ es existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

'$\Leftarrow$' einfach.

'$\Rightarrow$'. Sei $V' \subseteq V$ ein Komplement von $\mathrm{Ker}(f)$.

Dann ist $f|_{V'}\colon V' \to W$, $v \mapsto f(v)$ ein Isomorphismus

Definiere $g := (f|_{V'})^{-1}\colon W \to V' \subseteq V$. $\rightsquigarrow f \circ g = \mathrm{id}_W$

Quiz

Sei $A \in M_{m\times n}(K)$, so dass $B, C \in M_{n\times m}$ existieren mit

$$AB = E_m, \qquad CA = E_n.$$

Zeigen Sie, dass $n = m$ gilt, dass A invertierbar ist und dass $A^{-1} = B = C$ ist.

Aus $AB = E_m$ folgt $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{E_m} = \mathrm{id}_{K^m} \overset{(*)}{\Longrightarrow} f_A$ injektiv

Aus $CA = E_n$ folgt $f_C \circ f_A = \mathrm{id}_{K^n} \underset{(*)}{\Longrightarrow} f_A$ surjektiv

(*) vorheriges Quiz

Insgesamt: f_A Isomorphismus, insbesondere $\dim K^n = \dim K^m$, also $n = m$.

Außerdem ist A invertierbar, und aus $AB = E_m$ folgt $B = A^{-1}$, entsprechend $C = A^{-1}$.