Eigenwerte
Übersicht Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung - Wo stehen wir?

V Vektorraum über dem Körper K

$f\colon V \to V$ Endomorphismus

$\det\colon \mathrm{End}_K(V) \to K$, $f \mapsto \det(f)$, Determinante von f.

Kapitel 6 – 9 im Skript

Die Spur einer Matrix

K Körper

$$\mathrm{Spur}: M_n(K) \longrightarrow K$$
$$A = (a_{ij})_{i,j} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Abschnitt 9.4 im Skript

Diagonalisierbare Endomorphismen

V endl. dim'l K-VR

$f \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar, falls $\mathcal{B}$ Basis von V existiert,

so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Einleitung von Kapitel 10

Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

$f \in \mathrm{End}_K(V)$ $\qquad f: V \to V$

$v \in V \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$,

wenn $\boxed{f(v) = \lambda \cdot v}$

Abschnitte 10.1, 10.2 im Skript

In der Linearen Algebra 2 ...

befassen wir uns noch genauer mit der Theorie der Eigenwerte. Insbesondere:

- „Normalform“ für nicht-diagonalisierbare Endomorphismen,
- weitere Ergebnisse zur Diagonalisierbarkeit, zum Beispiel: Jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\boxed{A = A^t}$ ist diagonalisierbar.

"A symmetrisch"

Die Spur einer Matrix
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die Spur einer Matrix

K Körper

$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ quad. Matrix

Das Element $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K$

heißt die <u>Spur</u> der Matrix A.

Satz Seien $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times m}(K)$. Dann gilt

$$\mathrm{Spur}(\underbrace{AB}_{\in M_m(K)}) = \mathrm{Spur}(\underbrace{BA}_{\in M_n(K)})$$

$A=(a_{ij})_{i,j}$

$B=(b_{jk})_{j,k}$

Beweis $\mathrm{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right) = \mathrm{Spur}(BA)$.

Korollar Sei $A \in M_n(K)$ und sei $S \in GL_n(K)$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(SAS^{-1})$.

Beweis $\mathrm{Spur}(\underbrace{S}\underbrace{AS^{-1}}) = \mathrm{Spur}(\underbrace{AS^{-1}}\underbrace{S}) = \mathrm{Spur}(A)$.

$\boxed{\text{Zueinander konjugierte Matrizen haben dieselbe Spur.}}$

Quiz

zz: es existiert kein $S \in GL_n(K)$ mit $B = SAS^{-1}$.

Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B nicht zueinander konjugiert sind, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

- zueinander konj. Matrizen haben denselben Rang (aber $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(B)$)
- — " — dieselbe Determinante (aber $\det A = 0 = \det B$)
- — " — dieselbe Spur (aber $\mathrm{Spur}(A) = 2 = \mathrm{Spur}(B)$)

— sind A, B konjugiert zueinander, so sind A^j, B^j konjugiert für alle $j \in \mathbb{N}$,
denn $B = SAS^{-1} \Rightarrow B^j = B \cdot \ldots \cdot B = S A \underbrace{S^{-1} S}A \underbrace{S^{-1} \cdots S} A S^{-1} = S A^j S^{-1}$

insbes. gilt $\operatorname{Spur}(A^j) = \operatorname{Spur}(B^j)$ für alle j.

Im Beispiel

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A, \text{ hat Spur } 2 \\[2em] B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{hat Spur } 10 \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \text{ \underline{nicht} zueinander konjugiert.}$$

Die Spur eines Endomorphismus.

Sei K ein Körper, V endl-dim'l K-VR, $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

Sind $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V, dann sind $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ zueinander konjugiert, haben also dieselbe Spur.

Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Def. Die <u>Spur von f</u> ist definiert als $\mathrm{Spur}(f) := \mathrm{Spur}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) \in K$, wobei $\mathcal{B}$ irgendeine Basis von V ist.

Diagonalisierbare Endomorphismen
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Diagonalisierbare Endomorphismen

K Körper

V endlich-dim'l K-VR

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus

Dann $\mathcal{B}$ Basis von V $\longrightarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$

$\cap$

$M_n(K)$

$(n = \dim V)$

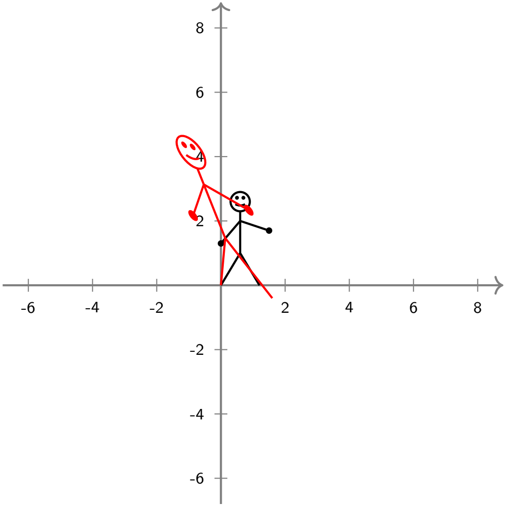
Frage: (Wie) kann man durch geschickte Wahl von $\mathcal{B}$ erreichen, dass diese Matrix eine „einfache Form“.

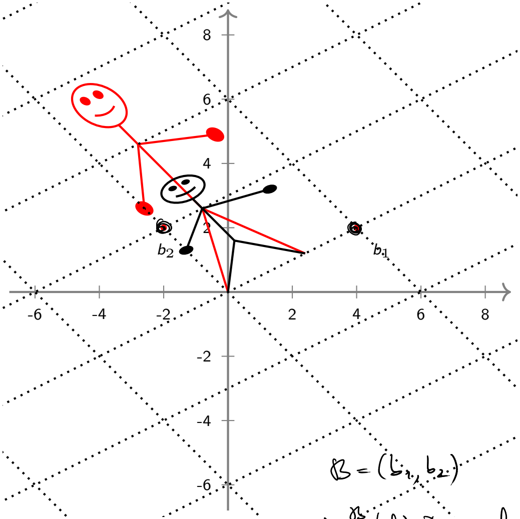
Def Wir nennen den Endomorphismus f <u>diagonalisierbar</u>, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ eine <u>Diagonalmatrix</u> ist.

Diagonalisierbare Matrizen

<u>Def</u>. Wir nennen eine Matrix $A \in M_n(K)$ diagonalisierbar, wenn der Endomorphismus $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$, diagonalisierbar ist.

Äquivalent: A diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ es existiert $S \in GL_n(K)$ so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix.





$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ Diagonal-matrix

siehe Video Woche 8 – Smithsche Normalform.

Quiz

Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ diagonalisierbar?

Wir suchen Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{Q}^2$ mit $A b_1 = d_1 b_1$, $A b_2 = d_2 b_2$, $d_1, d_2 \in \mathbb{Q}$

(denn dann $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$).

Sehen $A e_1 = e_1$, wir versuchen es also mit $b_1 := e_1$.

Für $b_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ muss $\begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A b_2 = \begin{pmatrix} d_2 x \\ d_2 y \end{pmatrix}$, also $d_2 = 2$, $2x = x + y$, d.h. $x = y$

eine Lösungsmöglichkeit

Wir setzen $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $A b_2 = 2 \cdot b_2$ und (b_1, b_2) bilden eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{Q}^2$

In der Tat $\quad \left(A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_A)\right)$

$$\underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}}_{\mathbin{/\!/}\ \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1}} A \, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition: Eigenwerte und Eigenvektoren

K Körper, V ein Vektorraum über K

<u>Def</u> Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

(1) Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in K$, falls $f(v) = \lambda \cdot v$.

Ein Element $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, wenn ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ existiert.

(2) Für einen Eigenwert λ von f heißt $V_\lambda = V_\lambda(f) := \{v \in V;\ f(v) = \lambda v\}$ der Eigenraum von f zum Eigenwert λ.

Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ, und 0

$f: V \to V$ diagonalisierbar $(\dim V < \infty)$

$\iff$ es ex. Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V

s.d. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \underbrace{\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)}_{\text{Diagonalmat.}}$

d.h. $f(b_j) = a_j\, b_j$, $a_j \in K$

Dann ist $V_\lambda(f) \subseteq V$ ein Untervektorraum. (z.B.: $f(v+v') = f(v)+f(v')$

$= \lambda v + \lambda v'$

$= \lambda(v+v')$

für $v, v' \in V_\lambda(f)$)

Manchmal schreibt man auch $V_\lambda(f)$
falls λ kein EW von f ist
(dann $V_\lambda(f) = 0$ Nullvektorraum).

Quiz

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V.
Was bedeutet es, dass v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 0 ist?

v ist Eigenvektor von f zum Eigenwert 0
$\iff$ $v \neq 0$ und $f(v) = 0$

Beschreiben Sie $V_0(f)$.

$V_0(f) = \{v \in V \,;\, f(v) = 0\} = \ker(f)$

Versuchen Sie, einen Satz zu formulieren, der den Begriff der Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus in der „Eigenwertsprache" beschreibt.

Satz: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt

f diagonalisierbar $\iff$ es existiert eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V, so dass alle b_j, $j = 1, \ldots, n$, Eigenvektoren von V sind.

Eigenwerte einer Matrix

Eigenwerte, – von A := Eigenwerte, –
$\underset{M_n(K)}{\wedge}$ von $f_A : K^n \to K^n$
$x \mapsto Ax$

Def Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$.

(1) Ein Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in K$, falls $Av = \lambda v$ ist. Ein Element $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, falls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ existiert.

(2) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so heißt

$$V_\lambda = V_\lambda(A) = \{v \in K^n ; \quad Av = \lambda v\}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

Charakterisierung von Eigenwerten
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Eigenwerte und Isomorphismen

K Körper

<u>Lemma</u> (1) Seien V, W Vektorräume über K, $f : V \to V$ ein Endomorphismus,

$\iota : V \xrightarrow{\sim} W$ ein Isomorphismus.

Dann ist $g := \iota \circ f \circ \iota^{-1}$ ein Endomorphismus von W.

Dann haben f und g dieselben Eigenwert, und für jeden Eigenwert λ induziert ι einen Isomorphismus

$$\begin{tikzcd} V_\lambda(f) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & V_\lambda(g) \arrow[d, phantom, "\cap" description] \\ V \arrow[r, "\iota"'] & W \end{tikzcd}$$

zwischen den Eigenräumen.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"] & V \arrow[d, "\iota"] \\ W \arrow[r, dashed, "g"'] \arrow[u, bend left, "\iota^{-1}"] & W \end{tikzcd}$$

Insbesondere: $\dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(g)$.

__Beweis__ Zeige zuerst: $v \in V_\lambda(f) \Rightarrow \tau(v) \in V_\lambda(g)$

__Begr.__ $g(\tau(v)) = \tau\Big(f\big(\underbrace{\tau^{-1}(\tau(v))}\big)\Big) = \tau\big(\underbrace{f(v)}_{\substack{\| \\ \lambda\cdot v, \text{ weil } v\in V_\lambda(f)}}\big) = \lambda\cdot\tau(v)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & V \arrow[d, "\tau"] \\ W \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

$g = \tau\circ f\circ\tau^{-1}$.

Erhalte als Einschränkung von τ eine Abbildung $V_\lambda(f) \to V_\lambda(g)$

Mit demselben Argument für τ^{-1} an Stelle von τ erhalten wir, dass die Einschränkung von τ^{-1} auf $V_\lambda(g)$ eine Abb $V_\lambda(g) \to V_\lambda(f)$ induziert.

Mit der Konvention $V_\lambda = 0$ falls λ kein Eigenwert ist, gilt dieses Argument für alle $\lambda\in K$ und liefert uns einen Isomorphismus $V_\lambda(f) \cong V_\lambda(g)$.

(2) Sei nun V ein endlichdimensionaler K-VR, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ eine Basis von V,

$c_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ der zugehörige Koordinatenisomorphismus und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

Dann gilt für $\lambda \in K$:

$$\lambda \text{ EW von } f \iff \lambda \text{ EW von } c_{\mathcal{B}} \circ f \circ c_{\mathcal{B}}^{-1} = F_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)} : \begin{array}{l} K^n \to K^n \\ x \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)x \end{array}$$

$$\iff \lambda \text{ EW von } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

und für solche λ induziert $c_{\mathcal{B}}$ einen Isomorphismus

$$V_\lambda(f) \xrightarrow{\sim} V_\lambda\left(F_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}\right) = V_\lambda\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right)$$

<u>Beweis</u> Wende (1) an auf f und den Isomorphismus $c_{\mathcal{B}}$.

(3) Sind K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$, $S \in GL_n(K)$, dann haben A und SAS^{-1} dieselben Eigenwerte und für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ haben $V_\lambda(A)$ und $V_\lambda(SAS^{-1})$ dieselbe Dimension.

<u>Beweis</u>

- Wende Teil (2) an: A, SAS^{-1} können wir betrachten als Matrizen, die bezüglich unterschiedlicher Basen <u>dieselbe</u> lin. Abb. $K^n \to K^n$ beschreiben. Teil (2) zeigt, dass die EW von A und SAS^{-1} genau die EW dieser linearen Abbildung sind.
- Alternativ: aus $Av = \lambda v$ folgt $(SAS^{-1})(Sv) = SAv = \lambda \cdot (Sv)$.

Charakterisierung von Eigenwerten

K Körper, V endl-dim'l K-VR, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ eine Basis von V

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_n(K)$.

Sei $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent

(i) λ ist ein Eigenwert von f

(ii) λ ist ein Eigenwert von A

(2) des Lemmas

(iii) $\mathrm{Ker}\left(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V\right) \neq 0$

(iv) $\mathrm{Ker}\left(A - \lambda \cdot E_n\right) \neq 0$

(v) $\det\left(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V\right) = 0$

(vi) $\det\left(A - \lambda \cdot E_n\right) = 0$

zu (iii) $\Leftrightarrow$ (v)

ein Endom eines endl-dim'l VR ist injektiv $\Leftrightarrow$ Isom. $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$

In diesem Fall ist

$$\boxed{\begin{aligned} V_\lambda(f) &= \mathrm{Ker}\left(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V\right) \\ V_\lambda(A) &= \mathrm{Ker}\left(A - \lambda \cdot E_n\right) \end{aligned}}$$

$f(v) = \lambda v$

$\Updownarrow$

$(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = 0$

Quiz

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Frage: für welche λ gilt $\det(A - \lambda E_n) = 0$?

$$A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Wir sehen: $\det(A - \lambda E_n) = 0 \iff (1-\lambda)(2-\lambda) \cdots (5-\lambda) = 0$

$\iff \lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Die EW von A sind $1, 2, 3, 4, 5$.

Allgemein $\det(A - \lambda E_n)$ Berechnung einer Determinante "mit Parameter"

$\rightsquigarrow$ Polynomausdruck in λ

$\rightsquigarrow$ Suche Nullstellen der Polynomfunktion

$$K \to K, \quad \lambda \mapsto \det(A - \lambda E_n)$$

$\ker(A - \lambda E_n) =$

- für gegebenes λ:
  Lösungsmenge eines homog. LGS
- für λ als Parameter:
  "Für welche λ hat das LGS $(A - \lambda E_n)v = 0$ eine nicht-triviale Lösung"

Bsp $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\quad \lambda \mapsto (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

Eigenwerte und Eigenvektoren - Beispiele
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Drehmatrizen

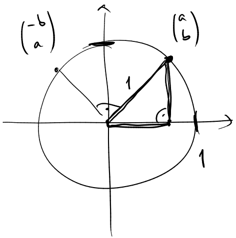
$K = \mathbb{R}, \qquad V = \mathbb{R}^2$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $-1 < a, b < 1$, $a^2 + b^2 = 1$ (insbes. $a, b \neq 0$)

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

(die Abb. $x \mapsto Ax$ ist Drehung um den Ursprung)



Dann hat A keinen Eigenwert in $\mathbb{R}$, denn

$$\det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{(a-\lambda)^2}_{\geq 0} + \underbrace{b^2}_{>0} > 0 .$$

<u>Bem</u> Ist $A \in M_3(\mathbb{R})$ mit $A A^t = E_3$, $\det(A) = 1$

($\rightsquigarrow$ f_A Drehung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$).

Man kann zeigen: A besitzt den EW 1, d.h. es existiert

$v \in \mathbb{R}^3$ mit $Av = v$ "$\langle v \rangle$ Drehachse"

Obere Dreiecksmatrizen in $M_2(K)$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$

Dann $\det(A - \lambda E_2) = 0 \iff \lambda = a$ oder $\lambda = d$,

also hat A die EW a, d.

<u>1. Fall</u> $a \neq d$. Seien v_1, v_2 EV zu a bzw. d: $Av_1 = av_1$, $Av_2 = dv_2$

Dann folgt: v_1, v_2 linear unabh., also eine Basis $\mathcal{B}$

Also $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$, insbes. A diagonalisierbar.

(Können $v_1 = e_1$ wählen; um v_2 konkret anzugeben: weitere Fallunterscheidung)

2. Fall $\quad a = d, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

A diagonalisierbar $\iff$ es existiert eine Basis, die aus EV von A besteht

$\iff \quad V_a(A) = K^2$

a einziger EW

$\iff \quad \mathrm{Ker}(\underbrace{A - a E_2}_{= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}) = K^2$

$\iff \quad b = 0.$

Insbes.: über jedem Körper K ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar

Übergang zu einem Erweiterungskörper

- Hatten gesehen:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \qquad \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ -1 < a, b < 1, \quad a^2 + b^2 = 1, \end{matrix}$$

hat keine EW in $\mathbb{R}$

- Aber:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \qquad \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ -1 < a, b < 1, \quad a^2 + b^2 = 1. \end{matrix}$$

hat EW in $\mathbb{C}$ (denn jede quad. Gleichung hat eine Lösung in $\mathbb{C}$)

$\updownarrow$

$$\boxed{\begin{matrix} \det(A - \lambda E_2) = 0 \; ? \\ \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \end{matrix}}$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

K Körper, V ein Vektorraum über K, $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

<u>Satz</u> Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu Eigenwerten

$\lambda_1 \ldots \lambda_m \in V$ (also $f(v_i) = \lambda_i v_i$)

und gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig.

<u>Beweis</u> durch vollst. Induktion nach m. IA. ($m = 0$) $m = 1$: Jeder EV ist $\neq 0$.

<u>IS $m > 1$</u> Seien $a_1, \ldots, a_m \in K$ mit $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$ (*)

z.z.: $a_1 = \ldots = a_m = 0$.

Wende f an auf $(*)$ $\lambda_1 a_1 v_1 + \ldots + \lambda_m a_m v_m = a_1 f(v_1) + \ldots + a_m f(v_m) = 0$

Ziehe von dieser Gleichung das λ_1-fache von $(*)$ ab. Wir erhalten

$$(\lambda_2 - \lambda_1) a_2 v_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) a_3 v_3 + \ldots + (\lambda_m - \lambda_1) a_m v_m = 0 .$$

Nach Induktionsvor. ist $v_2, \ldots v_m$ linear unabhängig, also folgt

$$\underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\neq 0} a_i = 0 \quad \text{für alle } i = 2, \ldots, m \quad \Rightarrow \quad a_i = 0$$

für alle $i = 2, \ldots m$.

Dann lautet $(*)$: $a_1 v_1 = 0$, und es folgt $a_1 = 0$, weil $v_1 \neq 0$.

Quiz

Kann zeigen: Für jedes $n > 1$ existiert $A \in M_n(\mathbb{Q})$, die keine EW hat,
m.a.W.: die Abb. $\lambda \mapsto \det(A - \lambda E_n)$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$.

Sei $K = \mathbb{Q}$. Welche Zahlen sind als Anzahl der Eigenwerte einer Matrix in $M_n(\mathbb{Q})$ möglich?

- Über jedem Körper: höchstens n paarw. versch. EW (denn eine Fam. von l.u. Vektoren in K^n hat höchstens n Elemente)
- Über jedem Kp. existieren Matrizen mit $1, 2, \ldots, n$ versch. EW.
-

Sei $K = \mathbb{R}$. Finden Sie jeweils eine Matrix in $M_3(\mathbb{Q})$ mit 1, 2, 3 paarweise verschiedenen Eigenwerten.

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ & a & * \\ & & a \end{pmatrix} \text{ hat EW } a, \qquad \begin{pmatrix} a & * & * \\ & b & * \\ & & c \end{pmatrix} \text{ hat EW } a, b, c$$

über $\mathbb{R}$: Jede Polynomfkt $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 hat eine Nullstelle (Zwischenwertsatz)

$\Rightarrow$ für jede (3×3)-Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ hat $\lambda \mapsto \det(A - \lambda E_n)$ Nullstelle,
also hat A mindestens einen EW

Korollar Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus eines endl.-dim'l K-VR V, $n = \dim V$.

(1) Dann hat f höchstens n paarw. versch. Eigenwerte.

(2) Wenn f genau n paarw. versch. Eigenwerte hat, dann besitzt V eine Basis, die aus Eigenvektoren von f besteht, d.h.: f ist diagonalisierbar.

Eigenräume
Vorlesungswoche 12

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Direkte Summe von Untervektorräumen

Erinnerung: V VR, $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. $V = U \oplus W \iff \begin{cases} U + W = V \\ U \cap W = 0 \end{cases}$

<u>Satz</u> Seien V ein Vektorraum, $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ Untervektorräume.

Dann sind äquivalent (i) $V = \sum_{i=1}^{m} U_i$ (d.h. jedes $v \in V$ lässt sich schreiben als $v = \sum_{i=1}^{m} u_i$, $u_i \in U_i$)

und für jedes $v \in V$ ist die Darstellung $v = u_1 + \ldots + u_m$, $u_i \in U_i$, <u>eindeutig</u>.

(ii) $V = \sum U_i$ und $0 = u_1 + \ldots + u_m$ mit $u_i \in U_i$ gilt nur für $u_1 = \ldots = u_m = 0$.

(iii) $V = \sum U_i$ und für alle i gilt $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = 0$.

(iv) Die natürliche Abbildung $\bigoplus_{i=1}^m U_i \longrightarrow V, \quad (u_1, \ldots, u_m) \mapsto \sum_{i=1}^m u_i,$ ist ein Isomorphismus.

$\bigoplus_{i=1}^m U_i = \{(u_1, \ldots, u_m);\ u_i \in U_i\}$ mit komponentenw. Add., Skalarmult.

"äußere" direkte Summe

<u>Beweis</u>. Übungsaufgabe.

Wenn die äquivalenten Bedingungen des Satzes erfüllt sind, dann schreiben wir $V = \bigoplus_{i=1}^m U_i$ (oder $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$).

Ergänzung zum Video: Wir sagen dann, V sei die <u>direkte Summe</u> der UnterVR U_i.

Quiz

Sei nun V endlichdimensional, $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$. Dann gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i \iff V = \sum_{i=1}^{m} U_i \text{ und } \dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$$

Begründung: '$\Rightarrow$' $V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$, dann folgt $\dim V = \underbrace{\dim \bigoplus_{i=1}^{m} U_i}_{} = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$

erhalte Basis durch "Zusammensetzen" von Basen der U_i

'$\Leftarrow$' gzz: $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i \to V$ ist bijektiv.

$(u_1, \ldots, u_m) \mapsto u_1 + \ldots + u_m$

surjektiv: $V = \sum_{i=1}^{m} U_i$, und jeder surj. Homom. zwischen endlich dim'l VR derselben Dimension ist ein Isomorphismus.

Korollar Sei V ein endlichdimensionaler K-VR und $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarw. versch. Eigenwerte von f.

und $V_{\lambda_1}(f), \ldots, V_{\lambda_m}(f)$ die zugehörigen Eigenräume.

Sei $V' \subseteq V$ der von allen $V_{\lambda_i}(f)$ erzeugte UVR.

(1) Dann gilt $V' = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}(f)$

(2) Und es ist $V' = V \iff f$ diagonalisierbar.

__Beweis__ __zu (1)__ Es genügt zu zeigen, dass für $v_i \in V_{\lambda_i}(f)$

nur dann $v_1 + \ldots + v_m = 0$ gelten kann, wenn $v_1 = \ldots = v_m = 0$.

Das ist richtig, weil Eigenvektoren zu __versch.__ EW linear unabhängig sind

__zu (2)__ $V' = V \iff$ V besitzt Basis, die aus Eigenvektoren von f besteht.

$\Updownarrow$

f diagonalisierbar.