Die Determinante
Übersicht Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Erinnerung -- Wo stehen wir?

V, W Vektorräume über dem Körper K

$f : V \to W$ lineare Abbildung $\leftrightsquigarrow$ darstellende Matrix $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$

Gruppen $(G, \cdot)$

$SL_n(K) \subset GL_n(K) = \{ A \in M_n(K) \ \underline{\text{invertierbar}} \}$ mit Matrizenprodukt

$\parallel$

$\langle E_{ij}(a) \rangle$

Kapitel 6, 7, 8 im Skript

Die symmetrische Gruppe $S_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv} \}$

Gruppe bzgl. Multiplikation

Signum-Homomorphismus
$$\begin{aligned} S_n &\longrightarrow \{1, -1\} \\ \sigma &\longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

Abschnitt 8.3 im Skript

Die Determinante einer Matrix

Ziel Ordne jeder quad. Matrix $A \in M_n(K)$ ein Element aus K zu, die "Determinante" von A

$$\rightsquigarrow \quad M_n(K) \xrightarrow{\det} K, \quad A \mapsto \det(A)$$

nächste Woche:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A) \neq 0 \iff A$ invertierbar

$\rightsquigarrow GL_n(K) \xrightarrow{\det} K^\times$ Gruppenhomomorphismus mit Kern $SL_n(K)$.

Abschnitt 9.1 im Skript

Alternierende multilineare Abbildungen

$$V^n = \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow W \qquad V, W \ \text{VR} / K$$

Spezialfall $\quad V = K^n, \quad V^n = (K^n)^n \quad \text{"} = \text{"} \quad M_n(K)$

Menge aller n-Tupel von Vektoren aus K^n

schreibe die n Vektoren aus K^n als Spalten in Matrix.

"Determinantenfunktion" $\quad V^n \to K \quad (n = \dim V)$

$$M_n(K) \to K$$

Abschnitt 9.1 im Skript

Die Leibniz-Formel

$A \in M_n(K)$, $A = (a_{ij})_{i,j}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

ist nicht-triviale Determinantenfunktion auf $M_n(K)$,

wir nennen $\det(A)$ die Determinante von A.

Abschnitt 9.1 im Skript

Die symmetrische Gruppe
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die symmetrische Gruppe S_n $= \mathrm{Bij}(\{1, \dots, n\})$

$= \{ f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv} \}$

Gruppe bezüglich Verkettung von Abbildungen:

$\sigma, \tau \in S_n \rightsquigarrow \sigma\tau = \sigma \circ \tau : i \mapsto \sigma(\tau(i)).$

„Permutationen"

$S_1 = \{ \mathrm{id} \}$

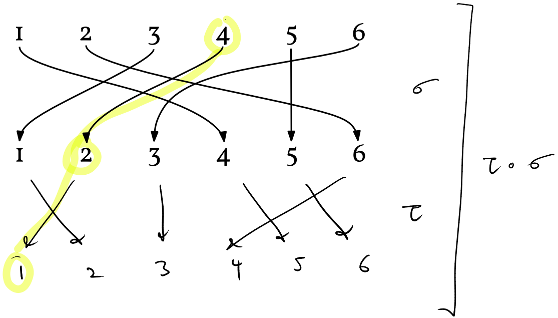
$S_2 = \{ \mathrm{id}, \sigma \}$ $\quad \sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$

allgemein: S_n hat $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Elemente

Die symmetrische Gruppe S_n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$$

$\sigma(1) = 4, \ \sigma(2) = 6, \ \sigma(3) = 1, \ldots$



Zykel, Transpositionen

Def Ein Zykel der Ordnung ℓ (oder: ein ℓ-Zykel) ist ein Element $\sigma \in S_n$,

so dass ℓ paarweise verschiedene Elem. $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots n\}$ existieren

mit $\sigma(i_1) = i_2, \quad \sigma(i_2) = i_3, \quad \ldots, \quad \sigma(i_{\ell-1}) = i_\ell, \quad \sigma(i_\ell) = i_1$

und $\sigma(j) = j \quad \forall j \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}$

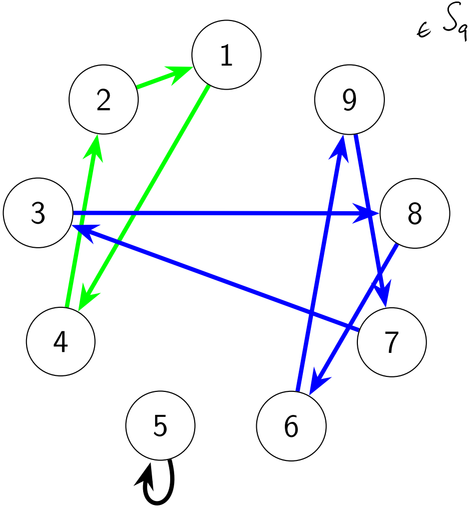
Wir nennen $\{i_1, \ldots i_\ell\}$ den Träger von σ und

schreiben $\sigma = (i_1\ i_2 \ldots i_\ell)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3-Zykel $= (2\,4\,5)$

Ein Zykel der Ordnung 2 heißt Transposition.



Die Zerlegung in Zykel mit disjunktem Träger im Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 9 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= (142)(38697).$$

Quiz

Transposition = 2-Zykel = $(i\ j)$ $\quad i \neq j \in \{1, \dots, n\}$

Geben Sie zwei Transpositionen an, die nicht miteinander kommutieren.

$\sigma = (12)$, $\quad \tau = (23) \in S_3$. $\quad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Geben Sie ein Produkt von drei Transpositionen an, das eine Transposition ist.

$\underbrace{(12)(12)}_{\mathrm{id}}(12) = (12)$, $\quad (12)(23)(12) = (13)$

Kann ein Produkt von zwei Transpositionen eine Transposition sein?

Nein. $\quad$ ($\dashrightarrow$ Signum-Abbildung)

S_n wird erzeugt von Transpositionen, das heißt:

- die einzige Untergruppe von S_n, die alle Transpositionen enthält, ist S_n
- m.a.W.: (weil für jede Transpos. τ gilt: $\tau^{-1} = \tau$) Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben.

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 1$ ✓, $\left(n = 2, \ S_2 = \{ id, (12) \} \ ✓ \right)$

n > 1 Sei $\sigma \in S_n$. Dann existiert eine Transpos. $\tau \in S_n$ mit $(\tau\sigma)(n) = n$,

nämlich $\tau = (\sigma(n), n)$ [falls $\sigma(n) \neq n$, sonst sei $\tau := id$].

Nach Induktionsvor. ist $\tau\sigma$ ein Produkt von Transpos. "in S_{n-1}" $\subset S_n$.

Dann ist auch $\sigma = \tau \cdot (\tau\sigma)$ ein Produkt von Transpos.

Quiz

Schreiben Sie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ als Produkt von Transpositionen.

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ & \updownarrow & & & \updownarrow & \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$(5\,6)$

$(2\,5)$

$(1\,3)$

$(1\,3)(2\,5)(5\,6)\,\sigma = \mathrm{id}$

$\Rightarrow \quad \sigma = (5\,6)(2\,5)(1\,3)$

<u>Bem</u> Kann auch zeigen: Jede Permutation $\in S_n$ lässt sich als Produkt von elementaren Transpos., d.h. Transpos. der Form $(i, i+1)$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, schreiben.

Das Signum einer Permutation
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Die symmetrische Gruppe

$$S_n = \{ \sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ bijektiv} \}$$

τ Transposition $(i\,j)$:

$$\tau(i) = j \qquad\qquad i \neq j.$$
$$\tau(j) = i$$
$$\tau(k) = k \quad \forall\, k \neq i, j$$

Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben.

Fehlstände und Länge einer Permutation

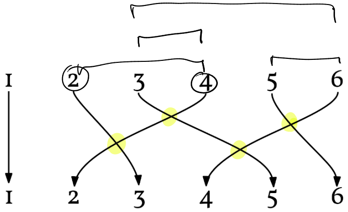
Def. Sei $\sigma \in S_n$.

(1) Ein Paar (i,j), $1 \le i,j \le n$, heißt <u>Fehlstand</u> von σ, falls

$i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(2) Die Anzahl der Fehlstände von σ nennen wir die Länge von σ.

<u>Beispiel</u>



$\sigma \in S_6$, $\ell(\sigma) = 4$

Das Signum einer Permutation

<u>Def.</u> Sei $\sigma \in S_n$. Das <u>Signum</u> von σ ist die Zahl $(-1)^{\ell(\sigma)} \in \{1, -1\} \; (\subseteq \mathbb{Z})$.

Ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, so nennt man σ auch eine gerade Permutation,

$= -1$ — — ungerade Permutation.

Quiz

Berechnen Sie die Länge und das Signum von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_6 \qquad \ell(\sigma) = 7, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$$

...einer Transposition.

$\sigma = (i\ j) \in S_n$, ohne Einschränkung $i < j$

$\rightsquigarrow$ Fehlstände von σ: $(i, i+1), \ldots, (i, j)$
$(i+1, j), \ldots, (j-1, j)$ $\rightsquigarrow$ $\ell(\sigma) = 2(j-i) - 1$

$\operatorname{sgn}(\sigma) = -1.$

Lemma Seien $\sigma \in S_n$ eine Transposition und $\tau \in S_n$ beliebig.

Dann gilt $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = -\operatorname{sgn}(\tau)$.

Beweis **1. Schritt** $\sigma = (i, i+1)$ elementare Transposition.

Für $j = 1, \ldots, i-1, i+2, \ldots n$ gilt: $\tau\sigma(j) = \tau(j)$

1. Fall $\tau(i) < \tau(i+1)$. Dann gilt $\ell(\tau\sigma) = \ell(\tau) + 1$.

2. Fall $\tau(i) > \tau(i+1)$ Dann gilt $\ell(\tau\sigma) = \ell(\tau) - 1$.

2. Schritt Sei nun $\sigma = (ij)$ irgendeine Transposition, $i < j$.

Schreibe $\sigma = \underbrace{(i, i+1) \cdot (i+1, i+2) \cdots (j-2, j-1)} (j, j-1) \underbrace{(j-2, j-1) \cdots (i+1, i+2) \cdot (i, i+1)}$

als Produkt von elem. Transpos. mit ungerader Anzahl von Faktoren.

Damit können wir die Aussage auf den ersten Schritt zurückführen.

Satz Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Dann gilt $\boxed{\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\tau)}$.

Beweis Schreibe τ als Produkt von r Transpositionen: $\tau = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r$

Dann gilt $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r) = -\mathrm{sgn}(\sigma\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{r-1}) = \cdots = (-1)^r \mathrm{sgn}(\sigma)$

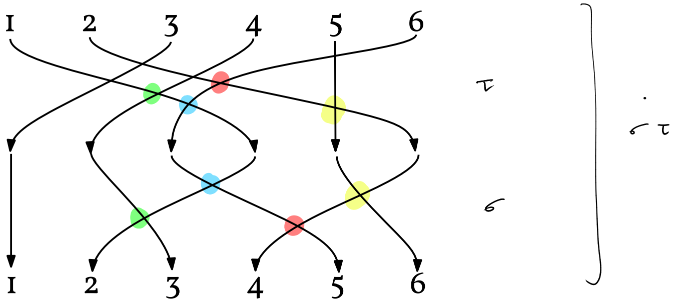
Lemma

$\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^r \cdot \mathrm{sgn}(id) = (-1)^r$.

mit anderen Worten: Die Abbildung $\mathrm{sgn}: S_n \longrightarrow \{1,-1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus

Gruppe bezüglich Multiplikation.

Es gilt $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_n$.



im allgemeinen gilt

$$\ell(\tau) + \ell(\sigma) > \ell(\sigma\tau)$$

---

dass $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$

heißt

$$(-1)^{\ell(\sigma\tau)} = (-1)^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)}$$

Alternierende multilineare Abbildungen
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Multilineare Abbildungen

K Körper, V, W K-VR

<u>Def</u> Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Abbildung $\delta : V^n \to W$, wenn

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ die

Abbildung $V \to W$, $v \mapsto \delta(v_1, \dots, v_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v}, v_{i+1}, \dots, v_n)$,

linear ist.

"δ ist linear in den n Einträgen des Produkts V^n"

<u>Spezialfall</u>. $V = K^n$, dann identifizieren wir $V^n = (K^n)^n = M_n(K)$

$(v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1 \cdots v_n)$

$v_i \in K^n$ Matrix mit Spalten v_i

$\rightsquigarrow$ $\delta : M_n(K) \to W$

"multilinear in den Spalten"

Quiz

Geben Sie einige Beispiele für Abbildungen $M_2(K) \to K$ an, die multilinear in den Spalten sind.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \quad ab, \quad \mapsto ad, \quad \mapsto ab+cd, \quad \mapsto ad-bc$$

$$\underbrace{}_{v_1} \quad \underbrace{}_{v_2}$$

Bestimmen Sie alle Abbildungen $V^2 \xrightarrow{\delta} W$, die sowohl linear als auch multilinear sind.

$\delta : V^2 \to W$ linear und multilinear $\Rightarrow$ $\delta(v, v') = 0$ für alle $(v, v') \in V^2$

Begr. $\delta(v, v') = \delta(v+0,\ 0+v') = \delta\big((v,0)+(0,v')\big) \underset{\delta \text{ linear}}{=} \delta(v,0) + \delta(0,v') \underset{\delta \text{ multilinear}}{=} 0 + 0 = 0.$

Alternierende multilineare Abbildungen

Sei $\delta : V^n \to W$ eine multilineare Abbildung.

Def Wir sagen, δ sei alternierend, wenn für alle $v_1, \ldots v_n \in V$, so dass $i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$ gilt: $\delta(v_1, \ldots v_n) = 0$.

Charakterisierung alternierender multilinearer Abbildungen

Sei $\delta : V^n \to W$ multilinear. Betrachte die folg. Eigenschaften:

(i) δ alternierend

$\Updownarrow$

(ii) $v_1, \ldots v_n \in V$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\delta(v_1, \ldots v_n) = 0$

(iii) "Vertauschen von zwei Einträgen ändert δ um das Vorzeichen",

das heißt: für alle $v_1, \ldots v_n \in V$ und $i \neq j$

gilt $\delta(v_1, v_2, \ldots \underset{i}{v_j}, \ldots, \underset{j}{v_i}, \ldots v_n) = -\delta(v_1, \ldots, v_n)$

(iv) Für alle $\sigma \in S_n$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt $\delta(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \delta(v_1, \ldots v_n)$

Dann gilt (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), und falls $1+1 \neq 0$ in K, dann auch (iii) $\Rightarrow$ (ii), also (i) bis (iv) äquivalent.

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) Klar.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei δ alternierend,
$v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängig
zz: $\delta(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ mit $a_i \in K$, nicht alle $a_i = 0$.

Nehmen zur Vereinfachung der Notation an, dass $a_1 \neq 0$ (andere Fälle analog)

Dann gilt

$$a_1 \cdot \delta(v_1, \dots, v_n) \overset{\delta \text{ alternierend}}{=} a_1 \delta(v_1, \dots, v_n) + a_2 \underbrace{\delta(v_2, v_2, \dots, v_n)}_{=0} + \dots + a_n \underbrace{\delta(v_n, v_2, \dots, v_n)}_{=0}$$

$$\overset{\substack{\delta \text{ multilinear} \\ \text{(für 1. Eintrag)}}}{=} \delta\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{=0}, v_2, \dots, v_n\Big) = 0 \underset{a_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \delta(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Wende (iv) an auf Transposition $\sigma = (i\,j)$, es gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Schreibe σ als Produkt von r Transpositionen.

Wende r-mal (iii) an. Wegen $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^r$ folgt

die Aussage von (iv).

Nun sei $1+1 \neq 0$ in K, und gelte (iii) "Vertauschung ändert Vorzeichen".

<u>Beh</u> δ alternierend.

<u>Begr</u> Seien $v_1, \ldots v_n \in V$ mit $v_i = v_j$, $i \neq j$.

Dann gilt $\delta(v_1, \ldots v_j \ldots v_i \ldots v_n) \overset{(iii)}{=} - \delta(v_1, \ldots, v_n)$

$$\delta(v_1 \ldots v_n) = \delta(v_1, \ldots \underset{i}{v_j} \ldots \underset{j}{v_i} \ldots v_n)$$

$\Rightarrow (1+1) \cdot \delta(v_1, \ldots v_n) = 0 \Rightarrow \delta(v_1 \ldots v_n) = 0.$

Verhalten bei „Spaltenumformungen“

Betrachte nun den Fall $V = K^n$, $V^n = M_n(K)$

Sei $\delta : M_n(K) \to W$ alternierend, multilinear in den Spalten

(I) Geht A' aus A durch elem. Spaltenumf. vom Typ I hervor: $i \neq j$, $a \in K$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. Spalte}}}{A} = (s_1 \cdots s_n), \qquad A' = (s_1 \cdots s_{i-1} \ \underbrace{s_i + a s_j}_{i} \ s_{i+1} \cdots s_n),$$

dann gilt $\delta(A) = \underbrace{\delta(A) + a\,\delta(s_1, \ldots s_{i-1} \underbrace{s_j}_{i} s_{i+1} \cdots s_n)}_{=0} = \delta(A')$

(II) Geht A' aus A durch Vertauschen zweier Spalten hervor, so gilt $\delta(A') = -\delta(A)$ $\leftarrow \delta$ alternierend

(III) Geht A' aus A durch Mult. einer Spalte mit $a \in K^\times$ hervor, so gilt $\delta(A') = \underline{a}\,\delta(A)$.
(denn δ multilinear)

Determinantenfunktionen
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Definition Determinantenfunktion

K Körper, V ein K-Vektorraum
$n = \dim V$

<u>Def.</u> Eine Determinantenfunktion auf V ist eine alternierende multilineare Abbildung $V^n \xrightarrow{\Delta} K$

<u>Spezialfall</u> $V = K^n$, $V^n = M_n(K)$, $\Delta : M_n(K) \longrightarrow K$
Determinantenfkt $\longleftrightarrow$ alternierend + multilinear in den Spalten.

Eine Determinantenfunktion Δ heißt nichttrivial, falls Δ nicht die Nullabbildung ist.

<u>Bem.</u> Ist $c: V \xrightarrow{\sim} W$ ein Isomorphismus und Δ eine Determinantenfunktion auf W, so ist $(v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \Delta(c(v_1), \ldots, c(v_n))$ eine Determinantenfunktion auf V.

Der Vektorraum der Determinantenfunktionen

Sei $\mathcal{D}_V := \{ \Delta : V^n \to K \text{ Determinantenfunktionen} \}$.

Dann ist das ein K-VR mit der üblichen Addition und Skalarmult. für Abbildungen: $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}_V$, $a \in K$

$$\left.\begin{array}{l} (\Delta + \Delta') : V^n \to K, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_n) + \Delta'(v_1, \dots, v_n) \\ a\Delta : V^n \to K, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto a \cdot \Delta(v_1, \dots, v_n) \end{array}\right\} \in \mathcal{D}_V$$

Die Dimension von $\mathscr{D}_V$ = $\{\Delta : V^n \to K$ Determinantenfunktion $\}$

<u>Satz</u> $\dim \mathscr{D}_V \leq 1$.

<u>Beweis</u> Reduktion auf den Fall K^n: Sei $c : V \to K^n$ ein VR-Isomorphismus.

Dann ist $\mathscr{D}_{K^n} \longrightarrow \mathscr{D}_V$, $\Delta \mapsto \left((v_1, \ldots v_n) \mapsto \Delta(c(v_1), \ldots c(v_n)) \right)$
$V^n \longrightarrow K$

ein Isomorphismus von K-VR.

Nun $V = K^n$. Betrachte den VR-Homomorphismus $\mathscr{D}_{K^n} \longrightarrow K$
$\Delta \longmapsto \Delta(E_n)$

zz: dieser ist injektiv,

äquivalent: Kern ist trivial, m.a.W.:

<u>Beh</u>: $\Delta \in \mathscr{D}_{K^n}$ mit $\Delta(E_n) = 0 \implies \Delta = 0$ (Nullabbildung)

<u>Begr</u> Sei $\Delta : M_n(K) \to K$ eine Determinantenfkt mit $\Delta(E_n) = 0$.

Sei $A \in M_n(K)$. zz: $\Delta(A) = 0$.

<u>1. Fall</u> $rg(A) < n$. Dann sind die Spalten von A linear abhängig, und jede altern. multilin. Abbildung bildet linear abh. Fam. von Vektoren auf 0 ab.

<u>2. Fall</u> $rg(A) = n$, d.h. A ist invertierbar.

Dann existieren $d' \in K$, $C \in Sl_n(K)$ mit $A = diag(1, \ldots, 1, d')\, C$

Dann ist C ein Produkt von Elementarmatrizen $E_{ij}(a)$, $i \neq j$, $a \in K$,

das bedeutet, dass A aus $diag(1, \ldots, 1, d')$ durch eine Folge von elem. Spaltenumf. vom Typ I hervorgeht.

Also $\Delta(A) = \Delta(diag(1, \ldots, 1, d')\, C) = \Delta(diag(1, \ldots, 1, d')) = d' \cdot \underbrace{\Delta(E_n)}_{=0}$

Quiz

Sei $\det\colon M_n(K) \to K$ eine Determinantenfunktion mit $\det(E_n) = 1$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A)$ für eine obere Dreiecksmatrix A. $= (a_{ij})_{i,j}$

1. Fall [$\operatorname{rg}(A) < n$, m.a.W.:] es ex. i mit $a_{ii} = 0$. Dann $\det(A) = 0$

2. Fall $a_{ii} \neq 0$ $\forall i$. Dann $A \xrightarrow[\text{elem. Spaltenumf. (I)}]{} \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \rightsquigarrow \det(A) = \det(\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}))$

$$= a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot \underbrace{\det(E_n)}_{=1}$$

Berechnen Sie $\det(P_\sigma)$ für eine Permutationsmatrix P_σ.

Schreibe $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r$ mit Transpositionen τ_i

Dann gilt $P_\sigma = P_{\tau_1} \cdot \ldots \cdot P_{\tau_r}$ $(= E_n P_{\tau_1} \cdots P_{\tau_r})$

und $A P_\tau$ entsteht (für $A \in M_n(K)$, τ Transpos.) aus

A durch Vertauschung zweier Spalten. $\rightsquigarrow \det(P_\sigma) = (-1)^r \cdot \det(E_n)$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Allg. Formel

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Die Leibniz-Formel
Vorlesungswoche 10

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Determinantenfunktionen

K Körper, V VR, $\dim V = n$

$$\mathcal{D}_V = \{ \Delta : V^n \to K \ \underbrace{\text{Determinantenfkt}}_{\text{alternierend multilinear}} \}, \quad \dim \mathcal{D}_V \le 1.$$

Speziell $V = K^n$, $\Delta : M_n(K) \longrightarrow K$

Frage Gibt es $\Delta : M_n(K) \to K$ Determinantenfunktion mit $\Delta(E_n) = 1$?

Die Leibniz-Formel

Wir definieren $\det : M_n(K) \longrightarrow K$ durch

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \in K$$

und nennen $\det(A)$ die <u>Determinante</u> der Matrix A.

Die Leibniz-Formel

$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Die Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \qquad \underline{\mathrm{sgn}(\sigma) = 1}$$

Die Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = \underline{-1}$$

$= (1\ 2)$

Die Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$$

Die Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

Eigenschaften

<u>Satz</u> Die durch Leibniz-Formel gegebene Abbildung $M_n(K) \xrightarrow{\det} K$ ist eine nicht-triviale Determinantenfunktion, es gilt $\det(E_n) = 1$.

<u>Beweis</u>. Für $A = E_n$ ist der Summand zu $\sigma = \mathrm{id}$ der einzige Summand $\neq 0$ in der Leibniz-Formel, und es folgt $\det(E_n) = 1$.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

- det ist multilinear in den Spalten
  - Summe von multilin. Abb. ist multilinear
  - für jedes σ ist die Abbildung

    $$A = (a_{ij})_{i,j} \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

    multilinear in den Spalten von A

- det ist alternierend. Sei A, so dass die j-te und j'-te Spalte von A gleich sind $(j \neq j')$

zz: $\det(A)$

Sei $\tau = (j, j') \in S_n$ Transposition, die j mit j' vertauscht

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}$$

$A_n := \{ \sigma \in S_n ;\ \operatorname{sgn}(\sigma) = 1 \} = \operatorname{Ker}(\operatorname{sgn})$ ("alternierende Gruppe")

$S_n \setminus A_n = \{ \sigma \in S_n ;\ \operatorname{sgn}(\sigma) = -1 \}$, $S_n = A_n \,\dot\cup\, (S_n \setminus A_n)$

Beh Die Abbildung $A_n \longrightarrow S_n \setminus A_n$, $\sigma \longmapsto \tau\sigma$, ist bijektiv

Begründung: Für $\sigma \in A_n$, also $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, gilt $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \underbrace{\operatorname{sgn}(\tau)}_{=-1} \operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$

Die Bijektivität folgt daraus, dass $\sigma \longmapsto \tau\sigma$ eine Umkehrabb ist (denn $\tau(\tau\sigma) = \sigma$)

Es folgt:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{=1} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{=-1} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1,\tau\sigma(1)} \cdots a_{n,\tau\sigma(n)} = 0$$

Nun gilt $a_{i,\tau\sigma(i)} = a_{i,\sigma(i)}$ für alle $\sigma \in A_n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$

(klar falls $\sigma(i) \notin \{j, j'\}$, denn dann gilt $\tau\sigma(i) = \sigma(i)$,
falls $\sigma(i) \in \{j, j'\}$, weil $a_{i,j} = a_{i,j'}$ für alle i gilt)

Die Fälle $n \leq 3$

$\underline{n=1}$ $\quad S_1 = \{ \mathrm{id} \}$, $\quad \det((a)) = a$.

$\underline{n=2}$ $\quad S_2 = \{ \mathrm{id}, (1\,2) \}$ $\quad \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

$\underline{n=3}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Die Regel von Sarrus

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \end{array} \\
\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$-ceg - afh - bdi + aei + bfg + cdh = \det(A)$$

ABER

Die Leibniz-Formel ist in aller Regel keine gute Mögl., eine Determinante auszurechnen! (Selbst im 3x3-Fall)

Quiz

$a_{i,\sigma(i)} = 0$ falls $i > \sigma(i)$

Berechnen Sie $\det(A)$ für eine obere Dreiecksmatrix A. $= \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Nur $\sigma = id$ liefert in der Leibniz-Formel einen Beitrag

$\leadsto \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Berechnen Sie $\det(P_\sigma)$ für eine Permutationsmatrix P_σ. $\leftsquigarrow$ j-te Spalte ist $e_{\sigma(j)}$

Nur σ^{-1} liefert in der Leibniz-Formel für $\det(P_\sigma)$ einen Beitrag $\neq 0$, also

$$\det(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$$
$$= \operatorname{sgn}(\sigma).$$

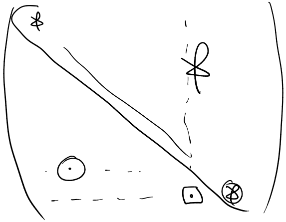
$$\begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix}$$

„Quiz“: Wie berechnet man eine Determinante?

Vergleichen Sie die Anzahl von Rechenoperationen, um eine Determinante

- mit elementaren Spaltenumformungen, oder
- mit der Leibniz-Regel zu berechnen.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \boxed{\ \dots\ } \qquad n!$$



Aufwand $\approx n^3$

$\mathscr{D}_V$ für allgemeines V.

Satz Sei V ein endl-dim'l K-Vektorraum. Dann ist der VR $\mathscr{D}_V$ aller Determinantenfunktionen $V^n \to K$ eindimensional.

Beweis Wähle Isom. $V \to K^n$. Dies induziert einen Isom.

$\mathscr{D}_{K^n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_V$. Wir haben gezeigt, dass $\mathscr{D}_{K^n} \neq 0$

(denn det ist nicht-triv. Element), also $\mathscr{D}_{K^n}$ eindimensional.

Also ist auch $\mathscr{D}_V$ ein-dimensional.