Grundlagen
Übersicht Vorlesungswoche 1

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Einleitung: Mathematikstudium

Mathematik lernen ist wie schwimmen lernen.

Ich wünsche Ihnen, dass das Mathematikstudium viel Spaß macht.

Einleitung: Lineare Algebra

- Ausgangspunkt: Lineare Gleichungssysteme
- Verbindungen in die gesamte Mathematik und darüber hinaus
- Schnell: Abstrakte Konzepte, die Sie aus der Schule nicht kennen.

<u>Beispiel</u>

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned} \quad \overset{II' = II - 2 \cdot I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} x - y &= 3 \\ 4y &= -1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 + y = \tfrac{11}{4} \\ y &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ (\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}) \}$ eindeutig lösbar

Kapitel 2 im Skript

Programmübersicht

- Moodle-Seite, zentrale Anlaufstelle, LA-Overflow-Forum
- Vorlesungsskript
- Videos: Übersicht, Vorlesungsvideos, Video zu Übungsaufgaben
- Übungsgruppen in Präsenz am Campus Essen
- Online-Aufgaben, Online-Tests
- „Globalübung“, Videokonferenz-Fragestunde, mittwochs 12:15 – 13:45 Uhr
- Hausaufgaben, Abgabe mittwochs in Gruppen von bis zu 3 Personen per Email

jeweils 50% der Punkte
für die Klausurzulassung

Aussagen, Mengen

- Aussagen (wahr, falsch), und, oder, nicht, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$

  Quantoren

- Menge, Mengenschreibweisen

  $\{1, 2, 3\}$

  $\{n \in \mathbb{N} ;\ \underbrace{n \text{ ist eine Quadratzahl}}_{\text{Bedingung}}\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- Teilmenge
- Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement
- Produkt

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen, Bruchzahlen

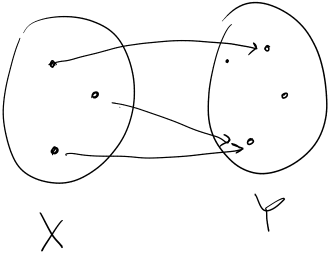
$\mathbb{R}$ reellen Zahlen

Abschnitte 3.6 – 3.9 im Skript

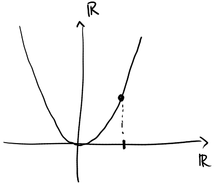
Abbildungen

X, Y Mengen

Abbildung $f: X \to Y$ Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ <u>genau ein Element</u> $f(x) \in Y$ zuordnet.



<u>Beispiel</u> • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = x^2$ (schreibe auch $x \mapsto x^2$)



Abschnitte 3.9 – 3.10 im Skript

Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

- Definitionsbereich, Wertebereich, Funktionsgraph
- Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$
- Bild einer Teilmenge in X, Bild von f; Urbild einer Teilmenge in Y
- Verkettung von Abbildungen
- injektiv, surjektiv, bijektiv

Abschnitte 3.9 – 3.10 im Skript

Vollständige Induktion

__Beispiel__ Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gilt: $6^n + 13^{n+1}$ ist ein Vielfaches von 7.

$n = 0$. $\quad 6^0 + 13^1 = 1 + 13 = 14 = 2 \cdot 7$

$n = 1$ $\quad 6^1 + 13^2 = 6 + 169 = 175 = 25 \cdot 7$

$n = 2$ $\quad 6^2 + 13^3 = \ldots$

Abschnitt 3.11 im Skript

Vollständige Induktion

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft, die die natürliche Zahl n haben oder nicht haben kann, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $P(0)$ *ist wahr, und*

(b) *für jede natürliche Zahl* $n \geqslant 1$ *gilt: Wenn* $P(n-1)$ *wahr ist, dann ist auch* $P(n)$ *wahr.*

Dann ist $P(n)$ *wahr für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Im Beispiel: (a) Zeige $6^0 + 13^1$ Vielf. von 7 ✓

(b) Zeige Wenn $6^{n-1} + 13^n$ Vielf von 7, dann auch $6^n + 13^{n+1}$.

Abschnitt 3.11 im Skript

Mengen
Vorlesungswoche 1

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung ergänzt: $\boxed{\text{von mathematischen Objekten}}$

M Menge $\qquad x \in M \qquad x$ gehört zu M, "x liegt in M"

$x \notin M \qquad x$ gehört nicht zu M.

$M = M'$ genau dann, wenn M und M' genau dieselben Elemente haben,

also genau dann, wenn für alle x: $\quad x \in M \iff x \in M'$

Beispiel

- $M = \{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,2,1,3\}$
- leere Menge $\emptyset = \{\ \}$, für alle x gilt $x \notin \emptyset$.
- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ natürliche Zahlen, $\quad \mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \,;\, a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$ rationale Zahlen $\qquad \mathbb{R}$ reelle Zahlen

Abschnitt 3.7 im Skript

Teilmengen; Durchschnitt, Vereinigung, ...

Schreibweise: $\{n \in \mathbb{N};\ \underbrace{n \text{ ist ein Vielfaches von } 6}\} = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}$

alle Elem., die Bedingung erfüllen

Korrektur 4.11

Def. Sei X eine Menge. Eine Menge Y heißt Teilmenge von X, wenn für alle $y \in Y$ gilt: $y \in X$. Schreibweise: $Y \subseteq X$.

Seien $X, Y \subseteq M$ Teilmengen

- Durchschnitt $X \cap Y = \{m \in M;\ m \in X \text{ und } m \in Y\}$
- Vereinigung $X \cup Y = \{m \in M;\ m \in X \text{ oder } m \in Y\}$
- Differenz $X \setminus Y (= X - Y) = \{x \in X;\ x \notin Y\}$
- Komplement $X^c = M \setminus X = \{m \in M;\ m \notin X\}$

Ähnlich: $X, Y, Z, X_i \subseteq M$

$X \cap Y \cap Z$

$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$

$= \{m \in M;\ \text{für alle } i \text{ gilt } m \in X_i\}$

Abschnitt 3.8 im Skript

Das kartesische Produkt

X, Y Mengen

Das Produkt von X und Y ist die Menge

$$X \times Y = \{(x,y);\ x \in X,\ y \in Y\}$$

aller Paare bestehend aus einem Element von X und einem Element von Y.

Beispiel $X = Y = \{1, 2\}$

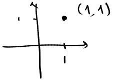
4 Elemente.

$$\{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

geordnete Paare

Beispiel

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$$



Analog

$$X \times Y \times Z = \{(x,y,z);\ x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

$$X_1 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

$$\underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-mal}} = \prod_{i=1}^{n} X = X^n$$

(oder allgemeiner I Menge $\prod_{i \in I} X_i$, $\prod_{i \in I} X = X^I$)

Abschnitt 3.9 im Skript

Abbildungen
Vorlesungswoche 1

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Abbildungen

Seien X, Y Mengen.

Def. Eine Abbildung f von X nach Y, geschrieben $f: X \longrightarrow Y$, ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. (das Bild von x unter f).

Formaler: Eine Abbildung von X nach Y ist eine Teilmenge $F \subseteq X \times Y$, so dass für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$ (dann ist dieses y gleich $f(x)$, m. a. W. $F = \{(x, f(x))\,;\, x \in X\}$)

Funktionsgraph

Abschnitt 3.9 im Skript

Abbildungen

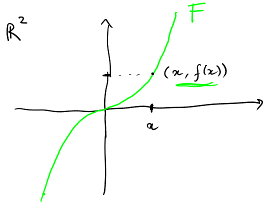
Definition

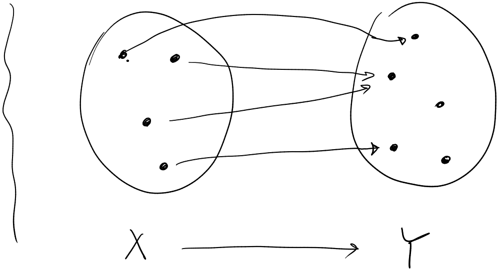
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

Beispiel $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^3$

(man schreibt auch: $x \mapsto x^3$)





Abschnitt 3.9 im Skript

Definitionsbereich, Wertebereich

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Dann heißt X der <u>Definitionsbereich</u> und Y der <u>Wertebereich</u> von f.

Mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

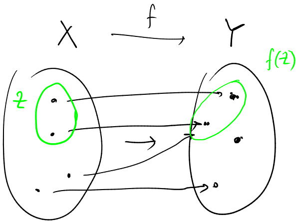
$\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Sei X eine Menge.
Die Abbildung $X \to X$, $x \mapsto x$, heißt die <u>identische Abbildung</u> oder Identitätsabbildung auf X, id_X

Abschnitt 3.9 im Skript

Bild, Urbild

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.



Das Bild von f ist $\operatorname{Im}(f) = \{ y \in Y ;$ es existiert $x \in X$ mit $f(x) = y \}$
$\subseteq Y$

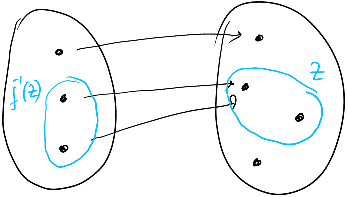
Ist $Z \subseteq X$ eine Teilmenge, so heißt

$$f(Z) := \{ y \in Y ; \text{ es existiert } x \in Z \text{ mit } f(x) = y \} = \{ f(x) ; x \in Z \} \subseteq Y$$

Ist $Z \subseteq Y$ eine Teilmenge, so heißt

$$f^{-1}(Z) := \{ x \in X ; f(x) \in Z \} \subseteq X$$

das Urbild von Z unter f.



Abschnitt 3.9 im Skript

Verkettung von Abbildungen

Seien X, Y, Z Mengen und $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$

Dann heißt die Abbildung $X \longrightarrow Z$, $x \longmapsto g(f(x))$,

die Verkettung (die Verknüpfung, Komposition, Hintereinanderausführung)

von f und g, geschrieben $g \circ f$, also $g \circ f : X \to Z$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Abschnitt 3.9 im Skript

Injektiv, surjektiv, bijektiv
Vorlesungswoche 1

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

injektiv, surjektiv, bijektiv

$f : X \to Y$

Def. Die Abbildung f heißt <u>injektiv</u>, wenn für alle $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ gilt: $f(x) \neq f(x')$

"an jedem $y \in Y$ kommt höchstens ein Pfeil an"

— f heißt surjektiv, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$

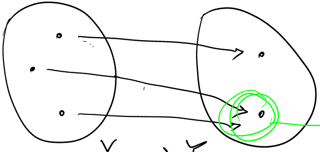
$(\iff \mathrm{Im}(f) = Y)$

"an jedem $y \in Y$ kommt mindestens ein Pfeil an"

— f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist

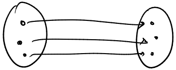
$(\iff$ für alle $y \in Y$ gibt es <u>genau ein</u> $x \in X$ mit $f(x) = y)$

"an jedem $y \in Y$ kommt genau ein Pfeil an"



$X \to Y$

nicht injektiv



Abschnitt 3.10 im Skript

Beispiele: injektiv, surjektiv, bijektiv

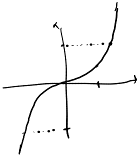
$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$

nicht inj.: $1^2 = (-1)^2$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

nicht surj.: $-1 \notin \mathrm{Im}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$ — bijektiv



$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ — injektiv, nicht surj.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^2$ — nicht injektiv, aber surjektiv

$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^2$ — bijektiv

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x^2$ — injektiv, nicht surjektiv

Die Umkehrabbildung

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

<u>Def</u> Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt Umkehrabbildung von f, wenn gilt: $g \circ f = id_X$, und $f \circ g = id_Y$

Abschnitt 3.10 im Skript

Satz

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) *Die Abbildung f ist bijektiv.*

(ii) *Die Abbildung f besitzt eine Umkehrabbildung $g\colon Y \to X$.*

$g \circ f = \mathrm{id}_X$

$f \circ g = \mathrm{id}_Y$

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und ebenfalls bijektiv.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Definiere $g: Y \to X$ durch $g(y) :=$ das eindeutig bestimmte Element $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Dann gilt $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = f(\ x\ ) = y$.

das Element mit $f(x) = y$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei g eine Umkehrabb. von f.

f injektiv: seien $x, x' \in X$

Falls $f(x) = f(x')$, dann $\underbrace{g(f(x))}_{= x} = \underbrace{g(f(x'))}_{= x'}$

Abschnitt 3.10 im Skript

f surjektiv: Sei $y \in Y$. Dann ist $y = f(g(y)) \in \mathrm{Im}(f)$.

---

g eindeutig bestimmt: Wegen $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist g auf allen Elementen der Form $f(x)$ eindeutig festgelegt $(g(f(x)) = x)$

Da f surjektiv ist, haben alle Elemente in Y diese Form.

g bijektiv, da f eine Umkehrabbildung von g ist.

<u>Beispiel</u> $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$

hat als Umkehrabbildung die Abbildung $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

(denn $\sqrt{x^2} = x$, $(\sqrt{x})^2 = x$)

Vollständige Induktion
Vorlesungswoche 1

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Vollständige Induktion

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen ist

$13^{n+1} + 6^n$ ein Vielfaches von 7.

$\to n = 0$: $13^1 + 6^0 = 13 + 1 = 14 = 2 \cdot 7$

$\Downarrow$

$n = 1$: $13^2 + 6^1 = 169 + 6 = 175 = 25 \cdot 7$

$\Downarrow$

$n = 2$: $\underline{13^3 + 6^2} = 13^2 \cdot 13 + 6^1 \cdot 6$

$\Downarrow$

$n = 3$

$$= \underline{13^2} \cdot 13 + 6 \cdot 13 - 6 \cdot 13 + 6 \cdot 6$$

$n = 4$

$$= \underbrace{(13^2 + 6)}_{\text{Vielf von } 7} \cdot 13 - 6\,(\underbrace{13 - 6}_{= 7})$$

$\vdots$

Abschnitt 3.11 im Skript

Vollständige Induktion

Beispiel: $P(n)$: "$13^{n+1} + 6^n$ Vielf. von 7"

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft, die die natürliche Zahl n haben oder nicht haben kann, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) *$P(0)$ ist wahr, und* "Induktionsanfang"

(b) *für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Wenn $P(n-1)$ wahr ist, dann ist auch $P(n)$ wahr.*

Dann ist $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung "Induktionsschritt"

$$\overset{(a)\ \checkmark}{P(0)} \overset{(b)}{\Longrightarrow} P(1) \overset{(b)}{\Longrightarrow} P(2) \overset{(b)}{\Longrightarrow} P(3) \overset{(b)}{\Longrightarrow} \cdots \overset{(b)}{\Longrightarrow}$$

Abschnitt 3.11 im Skript

Das Prinzip vom kleinsten Element : Jede nicht-leere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Beweis des Induktionsprinzips aus dem Prinzip vom kleinsten Element :

Gegeben eine Aussage $P(n)$ (für alle $n \in \mathbb{N}$)

mit (a) $P(0)$ wahr $\leftarrow$

(b) Für alle $n \geq 1$ gilt $\big(P(n-1) \Rightarrow P(n) \big)$

zu zeigen: $\{ n \in \mathbb{N} ;\ P(n) \text{ wahr} \} = \mathbb{N}$

Sei $M := \{ n \in \mathbb{N} ;\ P(n) \text{ falsch} \}$. Wenn $M \neq \emptyset$, dann hat M ein kleinstes Element m.

1\. Fall : $m = 0$ – nicht möglich, da $P(0)$ wahr

2\. Fall : $m > 0$. Das bedeutet $P(m)$ falsch,
$P(m-1)$ wahr (denn $m-1 \notin M$, weil m kleinstes Elem.) $\Big\}$ Widerspruch zu (b)

Insgesamt : $M = \emptyset$ ✓

Varianten des Induktionsprinzips.

- Induktionsanfang bei $n_0 \in \mathbb{N}$: $\left.\begin{array}{l} P(n_0) \text{ wahr} \\ + \text{ für alle } n > n_0: P(n-1) \Rightarrow P(n) \end{array}\right\}$

  $\Longrightarrow \quad P(n)$ wahr für alle $n \geq n_0$

- "starke Induktion" $\left.\begin{array}{l} P(0) \text{ wahr} \\ P(0), P(1), \ldots, P(n-1) \Rightarrow P(n) \quad \text{für alle } n > 0 \end{array}\right\}$

  $\Longrightarrow \quad P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Bem. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ für alle $n > 0$ ist gleichbedeutend mit $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ für alle $m \geq 0$

Beispiele: Vollständige Induktion
Vorlesungswoche 1

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Beispiel 1 Beh Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $13^{n+1} + 6^n$ ein Vielfaches von 7.

Beweis durch vollständige Induktion nach n.

IA Induktionsanfang $n = 0$. $13^{0+1} + 6^0 = 14 = 2 \cdot 7$ ✓

IS Induktionsschritt $n > 0$. Induktionsvoraussetzung: $13^n + 6^{n-1}$ Vielf. von 7.

zz: $13^{n+1} + 6^n$ Vielfaches von 7.

$\left[\begin{array}{lll} n-1 \to n & (n>0) \\ m \to m+1 & (m \geq 0) \end{array} \right]$

Wir schreiben

$$13^{n+1} + 6^n = 13^n \cdot 13 + \overbrace{6^{n-1} \cdot 13 - 6^{n-1} \cdot 13}^{=0} + 6^n$$

$$= \underbrace{(13^n + 6^{n-1})}_{\text{Vielfaches von 7 nach IV}} \cdot 13 - 6^{n-1} \underbrace{(13-6)}_{7}$$

und sehen: Als Differenz von zwei Vielfachen von 7 ist $13^{n+1} - 6^n$ auch ein Vielf. von 7.

Das Summensymbol

Idee $\sum_{i=0}^{n} a_i = \text{"} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{"}$

Formale Definition:

$$\sum_{i=0}^{0} a_i = a_0, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i := \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n \quad (n \geq 1)$$

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i \qquad \sum_{i=1}^{0} a_i$$

leere Summe $= 0$

<u>Beispiel</u>

$$\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1+4+9 = 14$$

<u>Varianten</u>

- $\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3 + a_4 \ldots + a_7$, $\quad \sum_{i\in I} a_i$ $\quad I$ endliche Menge $\quad \{0, \ldots, n\}$

- Produktsymbol $\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, $\quad \prod_{i\in I} a_i$

leeres Produkt $= 1$

Beispiele Summensymbol

$$\sum_{i=2}^{5} 2i =$$

$$\sum_{i=0}^{2} (x^{i+1} - x^{i}) =$$

$$\sum_{i=} i^2 = 77$$

Beispiele Summensymbol

$$\sum_{i=2}^{5} 2i = 4 + 6 + 8 + 10 = 28,$$

$$\sum_{i=0}^{2} (x^{i+1} - x^{i}) = x^1 - x^0 + x^2 - x^1 + x^3 - x^2 = x^3 - 1,$$

$$\sum_{i=4}^{6} i^2 = 16 + 25 + 36 = 77.$$

Beispiel 2

Für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$n=2$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Beweis durch vollst. Induktion nach n.

Induktionsanfang $n=1$ ✓

Induktionsschritt $n>1$. IV: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \overset{IV}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{n+1-1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Bem Mit Konvention "leere Summe" auch richtig für $n=0$.