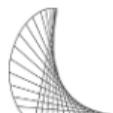


Aufgabe 2 (Spaltenumformungen)

Übungsblatt 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra I, WS 20/21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

(1) Seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum, seien $u_1, \dots, u_n \in V$ und sei $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ der von den u_i erzeugte Untervektorraum.

(a) Sind $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ und $a \in K$, so gilt

$$U = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + au_j, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle = U'$$

(d.h. u_i wird ersetzt durch $u_i + au_j$, alle anderen Vektoren bleiben unverändert).

(b) Ist $1 \leq i \leq n$ und $a \in K$, $a \neq 0$, so gilt $U = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, au_i, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle$ (d.h. u_i wird ersetzt durch au_i , alle anderen Vektoren bleiben unverändert). $\cong U'$

zu (1a) zu zeigen: $U = U'$. • $U' \subseteq U$ gilt: $u_1, \dots, u_{i-1}, \underline{u_i + au_j}, u_{i+1}, \dots, u_n \in U$.

Weil $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ist das hier für $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$. Weil $u_i, u_j \in U$ und $U \subseteq V$ ein UVR, gilt auch $u_i + au_j \in U$.

• $U \subseteq U'$ geg.: $u_1, \dots, u_n \in U'$. Das ist klar für alle u_j mit $l \neq i$.

Weil

$$u_i = \underbrace{u_i + a u_j}_{\in U'} - \underbrace{a u_j}_{\in U'} \text{ gilt, liegt auch } u_i \in U'.$$

zu (1b) Sei jetzt

$$U' = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, a u_i, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle.$$

$$U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle.$$

• $U' \subseteq U$

Es ist nur zu zeigen, dass $a u_i \in U$ gilt. Das ist klar, weil $u_i \in U$ ist und $U \subseteq V$ ein UVR ist.

• $U \subseteq U'$

Es genügt zu zeigen, dass $u_i \in U'$ ist. Wir schreiben

$$u_i = \underbrace{a^{-1}(a u_i)}_{\in U'} \in U', \text{ weil } U' \text{ ein UVR von } V \text{ ist.}$$

(2) Sei nun $V = K^m$ und sei $A \in M_{m \times n}(K)$ eine Matrix. Analog zu den elementaren Zeilenumformungen, die wir in der Vorlesung betrachtet haben, können wir auch **elementare Spaltenumformungen** betrachten: (I) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte, (II) Vertauschen zweier Spalten, (III) Multiplizieren aller Einträge einer Spalte mit demselben Element $a \in K^\times$.

Sei A' eine Matrix, die aus A durch elementare Spaltenumformungen hervorgeht. Sei U der Untervektorraum von $V = K^m$, der von den Spalten von A erzeugt wird, und sei U' der Vektorraum, der von den Spalten von A' erzeugt wird.

$$U, U' \subseteq K^m = V$$

Zeigen Sie: Es gilt $U = U'$.

Seien $u_1, \dots, u_n \in K^m$ die Spalten von A .

Es genügt, den Fall zu betrachten, dass A' aus A durch eine einzige elem. Spaltenumf.

hergeleitet.

1. Fall A' entsteht aus A durch Spaltenumf. vom Typ I: Addiere das a -fache der j -ten Spalte zur i -ten Spalte.

$$\text{Dann gilt } U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle, \quad U' = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + a u_j, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle.$$

$$\text{Nach (1a) gilt } U = U'.$$

2. Fall A' entsteht aus A durch Vertauschen zweier Spalten.

Dann gilt offenbar $U = U'$, denn der UVR, der von einer Familie von Vektoren erzeugt wird, ist unabhängig von deren Reihenfolge.

3. Fall A' entsteht aus A durch eine Spaltenumf. vom Typ: Multipliziere alle Einträge der i -ten Spalte mit $a \in K^\times$.

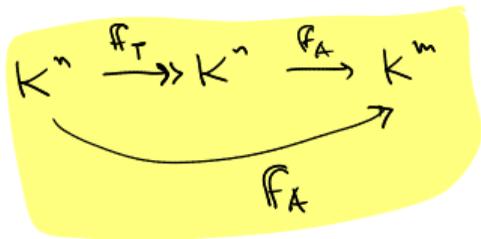
$$\text{Dann gilt } U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle, \quad U' = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, a u_i, u_{i+1}, \dots, u_n \rangle$$

Nach (1b) gilt $u = u'$.

Ergänzung: $\underbrace{\langle \text{Spalten von } A \rangle}_{\subseteq K^m} = \text{Im}(f_A)$

Andererseits: Wenn A' aus A durch
 elem. Spaltenumformungen hervorgeht,
 dann existiert eine **invertierbare**
 Matrix $T \in M_n(K)$ mit $A' = AT$.

Dann gilt $f_{A'} = f_{AT} = f_A \circ f_T$



$A \in M_{m \times n}(K)$ mit Spalten u_1, \dots, u_n

$$f_A: K^n \rightarrow K^m$$

$$(x_1, \dots, x_n)^t \mapsto \underbrace{Ax}_{\parallel \sum_{i=1}^n x_i u_i}$$

(vgl.: elem. Zeilenumformungen

$$A' = SA$$

(I) $S = E_{ij}(a)$

(II) $S = P_{ij}$

(III) $S = \text{diag}(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$

Nun ist f_T bijektiv, weil T invertierbar ist, mit Umkehrabb. $f_{T^{-1}}$.

Insofern: f_T surjektiv, d.h. $\text{Im}(f_{A'}) = \text{Im}(f_A \circ f_T) = \text{Im}(f_A)$.

//
UVR, die von den
Spalten von A'
erzeugt wird

//
UVR, die von den
Spalten von A
erzeugt wird