Aufgabe 2 (Spaltenumformungen)
Übungsblatt 6

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

(1) Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum, seien $u_1, \ldots, u_n \in V$ und sei $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ der von den u_i erzeugte Untervektorraum.

(a) Sind $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ und $a \in K$, so gilt

$$U = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + au_j, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle = U'$$

(d.h. u_i wird ersetzt durch $u_i + au_j$, alle anderen Vektoren bleiben unverändert).

(b) Ist $1 \leq i \leq n$ und $a \in K$, $a \neq 0$, so gilt $U = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, au_i, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle$ (d.h. u_i wird ersetzt durch au_i, alle anderen Vektoren bleiben unverändert). $\| \; U'$

zu (1a) zu zeigen: $U = U'$. • $U' \subseteq U$ gzz: $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + au_j, u_{i+1}, \ldots u_n \in U$.

Weil $U = \langle u_1, \ldots u_n \rangle$ ist das klar für $u_1, \ldots u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots u_n$. Weil $u_i, u_j \in U$

und $U \leq V$ ein UVR, gilt auch $u_i + au_j \in U$.

- $\underline{U \subseteq U'}$ z.z.: $u_1, \ldots, u_n \in U'$. Das ist klar für alle u_ℓ mit $\ell \neq i$.

Weil $\quad u_i = \underbrace{u_i + a u_j}_{\in U'} - \underbrace{a u_j}_{\in U'}$ gilt, liegt auch $u_i \in U'$.

__zu (1b)__ Sei jetzt $U' = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, a u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle$. $\qquad U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$.

- $\underline{U' \subseteq U}$ Es ist nur zu zeigen, dass $a u_i \in U$ gilt. Das ist klar, weil $u_i \in U$ ist und $U \subseteq V$ ein UVR ist.

- $\underline{U \subseteq U'}$ Es genügt zu zeigen, dass $u_i \in U'$ ist. Wir schreiben

$$u_i = a^{-1} (\underbrace{a u_i}_{\in U'}) \in U',$$

weil U' ein UVR von V ist.

(2) Sei nun $V = K^m$ und sei $A \in M_{m\times n}(K)$ eine Matrix. Analog zu den elementaren Zeilenumformungen, die wir in der Vorlesung betrachtet haben, können wir auch *elementare Spaltenumformungen* betrachten: (I) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte, (II) Vertauschen zweier Spalten, (III) Multiplizieren aller Einträge einer Spalte mit demselben Element $a \in K^\times$.

Sei A' eine Matrix, die aus A durch elementare Spaltenumformungen hervorgeht. Sei U der Untervektorraum von $V = K^m$, der von den Spalten von A erzeugt wird, und sei U' der Vektorraum, der von den Spalten von A' erzeugt wird.

$U, U' \subseteq K^m = V$

Zeigen Sie: Es gilt $U = U'$.

Seien $u_1, \ldots, u_n \in K^m$ die Spalten von A.

Es genügt, den Fall zu betrachten, dass A' aus A durch eine einzige elem. Spaltenumf.

herausgeht.

1. Fall A' entsteht aus A durch Spaltenumf. vom Typ I: Addiere das a-fache der j-ten Spalte zur i-ten Spalte.

Dann gilt $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, $U' = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + a u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n \rangle$.

Nach (1a) gilt $U = U'$.

2. Fall A' entsteht aus A durch Vertauschen zweier Spalten.
Dann gilt offenbar $U = U'$, denn der UVR, der von einer Familie von Vektoren erzeugt wird, ist unabhängig von deren Reihenfolge.

3. Fall A' entsteht aus A durch eine Spaltenumf. vom Typ: Multipliziere alle Einträge der i-ten Spalte mit $a \in K^\times$.

Dann gilt $U = \langle u_1, \ldots u_n \rangle$, $U' = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, a u_i, u_{i+1}, \ldots u_n \rangle$

Nach (1b) gilt $U = U'$.

Ergänzung: $\underbrace{\langle \text{Spalten von } A \rangle}_{\subseteq K^m} = \mathrm{Im}(\mathbf{f}_A)$

$A \in M_{m \times n}(K)$ mit Spalten $u_1, \ldots, u_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A : K^n &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto \underbrace{Ax}_{= \sum_{i=1}^{n} x_i u_i} \end{aligned}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)^t$

Andererseits: Wenn A' aus A durch elem. Spaltenumformungen hervorgeht, dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in M_n(K)$ mit $A' = A\,T$.

(vgl.: elem. Zeilenumformungen $A' = S\,A$

(I) $S = E_{ij}(a)$

(II) $S = P_{ij}$

(III) $S = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, a, 1, \ldots, 1)$)

Dann gilt $\mathbf{f}_{A'} = \mathbf{f}_{AT} = \mathbf{f}_A \circ \mathbf{f}_T$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, two heads, "\mathbf{f}_T"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{f}_A"'] & K^n \arrow[r, "\mathbf{f}_A"] & K^m \end{tikzcd}$$

Nun ist $\mathbb{f}_T$ bijektiv, weil T invertierbar ist, mit Umkehrabb. $\mathbb{f}_{T^{-1}}$.

Insbes.: $\mathbb{f}_T$ surjektiv, d.h. $\mathrm{Im}(\mathbb{f}_{A'}) = \mathrm{Im}(\mathbb{f}_A \circ \mathbb{f}_T) = \mathrm{Im}(\mathbb{f}_A)$.

$\mathrm{Im}(\mathbb{f}_{A'})$ = UVR, der von den Spalten von A' erzeugt wird

$\mathrm{Im}(\mathbb{f}_A)$ = UVR, der von den Spalten von A erzeugt wird