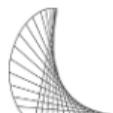


Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit)

Übungsblatt 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra I, WS 20/21



Essen Seminar for Algebraic
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ eine Teilmenge mit $0 \notin M$. Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, \dots, v_n genau dann linear unabhängig sind, wenn für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \{0\}.$$

$$v_1, \dots, v_n \in V, \text{ alle } v_i \neq 0$$

v_1, \dots, v_n linear unabhängig

(wenn $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0, a_i \in K,$
dann gilt $a_1 = \dots = a_n = 0$)

\iff

$$\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2, \dots, v_n \rangle = 0$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_3, \dots, v_n \rangle = 0$$

\vdots

$$\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle \cap \langle v_n \rangle = 0$$

nur 0 kann sowohl als LK von v_1, \dots, v_i als auch als LK von v_{i+1}, \dots, v_n geschrieben werden



' \Rightarrow ' Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig, und sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Beh.: $\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = 0$

Begr. Sei $v \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$, also existieren $a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n \in K$ mit

$$a_1 v_1 + \dots + a_i v_i = v = a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n$$

Es folgt $a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + (-a_{i+1}) v_{i+1} + \dots + (-a_n) v_n = 0$,

also wegen der linearen Unabhängigkeit $a_1 = \dots = a_i = -a_{i+1} = \dots = -a_n = 0$.

Insbesondere gilt $v = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i = 0$.

⇐ Seien $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$. z.z.: $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Angenommen, es existiert i mit $a_i \neq 0$.

Wir fixieren den kleinsten Index i mit $a_i \neq 0$.

Dann gilt

$$a_1 v_1 + \dots + a_i v_i = -a_{i+1} v_{i+1} - \dots - a_n v_n$$

$$\in \langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = 0,$$

also folgt $\underbrace{a_i}_{\neq 0} v_i = \underbrace{a_1 v_1 + \dots}_{\substack{\text{alle} \\ \text{Koeff sind} \\ = 0 \text{ nach Wahl} \\ \text{von } i}} + \underbrace{a_i v_i}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow v_i = 0$

Ziel: Widerspruch

(Idee: finde $v \neq 0$,

das sich sowohl als LK

von v_1, \dots, v_i als auch als

LK von v_{i+1}, \dots, v_n darstellen

lässt.)

— ein Widerspruch
zur Voraussetzung,
dass alle $v_1, \dots, v_n \neq 0$.