Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit)
Übungsblatt 5

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Teilmenge mit $\boxed{0 \notin M}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \{0\}.$$

nur 0 kann sowohl als LK von $v_1, \ldots, v_i$ als auch als LK von $v_{i+1}, \ldots, v_n$ geschrieben werden

$v_1, \ldots, v_n \in V$, alle $v_i \neq 0$

$v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig $\iff$

$$\overbrace{\begin{aligned} \langle v_1 \rangle \cap \langle v_2, \ldots, v_n \rangle &= 0 \\ \langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_3, \ldots, v_n \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle \cap \langle v_n \rangle &= 0 \end{aligned}}$$

(wenn $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$, $a_i \in K$, dann gilt $a_1 = \ldots = a_n = 0$)

'$\Longrightarrow$' Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, und sei $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

<u>Beh</u>: $\langle v_1, \ldots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = 0$

<u>Begr</u> Sei $v \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$, also existieren $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \in K$ mit

$$a_1 v_1 + \cdots + a_i v_i = v = a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n$$

Es folgt $a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i + (-a_{i+1}) v_{i+1} + \ldots + (-a_n) v_n = 0$,

also wegen der linearen Unabhängigkeit $a_1 = \ldots = a_i = -a_{i+1} = \cdots = -a_n = 0$.

Insbesondere gilt $v = a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i = 0$.

$\Longleftarrow$ Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$. zz: $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Angenommen, es existiert i mit $a_i \neq 0$.
Wir fixieren <u>den kleinsten Index i mit $a_i \neq 0$</u>.

Ziel: Widerspruch
(Idee: finde $v \neq 0$,
das sich sowohl als LK
von $v_1 \ldots v_i$ als auch als
LK von $v_{i+1} \ldots v_n$ darstellen
lässt.)

Dann gilt

$$a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i = -a_{i+1} v_{i+1} - \ldots - a_n v_n$$

$$\in \langle v_1, \ldots v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots v_n \rangle = 0,$$

also folgt $\underbrace{a_i}_{\neq 0} v_i = \underbrace{a_1 v_1 + \ldots}_{\text{alle Koeff sind } = 0 \text{ nach Wahl von } i} + \underbrace{a_i}_{\neq 0} v_i = 0 \implies v_i = 0$

— ein Widerspruch
zur Voraussetzung,
dass alle $v_1 \ldots v_n \neq 0$.