Aufgabe 3
Übungsblatt 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $n = \dim V$. Sei f ein Endomorphismus von V, so dass $\mathrm{rg}(f) = 1$, $\mathrm{rg}(f \circ f) = 0$. Zeigen Sie:

Es existiert eine Basis $\mathscr{B}$ von V, so dass in der Matrix $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$ alle Einträge bis auf a_{1n} gleich Null sind, und $a_{1n} = 1$ gilt.

$f: V \to V$, $\mathrm{rg}(f) = 1$, d.h. $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$, $\mathrm{rg}(f \circ f) = 0$, d.h. $f \circ f = 0$.

Gesucht: Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V,

so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

d.h.
- $f(b_i) = 0$ $\quad i = 1, \dots, n-1$
- $\boxed{f(b_n) = b_1}$

Es gilt: $\boxed{b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathrm{Ker}(f), \quad b_1 \in \mathrm{Im}(f) \setminus \{0\}}$

Lösung: Sei $b_1 \in \operatorname{Im}(f) \setminus \{0\}$, schreibe $b_1 = f(b_n)$ für ein $b_n \in V$.

Dann gilt $b_1 \in \operatorname{Ker}(f)$, denn $f(b_1) = f(f(b_n)) = (\underbrace{f \circ f}_{=0})(b_n) = 0$,

$b_n \notin \operatorname{Ker}(f)$, denn $f(b_n) = b_1 \neq 0$.

Weil $\operatorname{rg}(f) = 1$ ist, ist nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim V - \operatorname{rg}(f) = n-1$. Es folgt: $\underbrace{\operatorname{Ker}(f)}_{\dim n-1} \oplus \underbrace{\langle b_n \rangle}_{\dim 1} = V$

Ergänze b_1 zu einer Basis $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ von $\operatorname{Ker}(f)$.

Dann bilden – weil $V = \operatorname{Ker}(f) \oplus \langle b_n \rangle$ – $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ eine Basis von V.

Diese Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ hat genau die gesuchten Eigenschaften

$$f(b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \qquad \text{und} \qquad f(b_n) = b_1 .$$