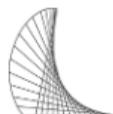


# Aufgabe 3

## Übungsblatt 8

Ulrich Görtz

Lineare Algebra I, WS 20/21



Essen Seminar for Algebraic  
Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN

Seien  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $n = \dim V$ . Sei  $f$  ein Endomorphismus von  $V$ , so dass  $\text{rg}(f) = 1$ ,  $\text{rg}(f \circ f) = 0$ . Zeigen Sie:

Es existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass in der Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$  alle Einträge bis auf  $a_{1n}$  gleich Null sind, und  $a_{1n} = 1$  gilt.

$$f: V \rightarrow V, \quad \text{rg}(f) = 1, \text{ d.h. } \dim \text{Im}(f) = 1, \quad \text{rg}(f \circ f) = 0, \text{ d.h. } f \circ f = 0.$$

Gesucht: Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$ ,

so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & \bigcirc & & | \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h. } \begin{cases} \checkmark & f(b_i) = 0 & i=1, \dots, n-1 \\ \bullet & f(b_n) = b_1 \end{cases}$$

Es gilt:  $b_1, \dots, b_{n-1} \in \text{Ker}(f), \quad b_n \in \text{Im}(f) \setminus \{0\}$

Lösung Sei  $b_1 \in \text{Im}(f) \setminus \{0\}$ , schreibe  $b_1 = f(b_n)$  für ein  $b_n \in V$ .

Dann gilt  $b_1 \in \text{Ker}(f)$ , denn  $f(b_1) = f(f(b_n)) = \underbrace{(f \circ f)(b_n)}_{=0} = 0$ ,

$b_n \notin \text{Ker}(f)$ , denn  $f(b_n) = b_1 \neq 0$ .

Weil  $\text{rg}(f) = 1$  ist, ist nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$\dim \text{Ker}(f) = \dim V - \text{rg}(f) = n - 1$ . Es folgt:  $\underbrace{\text{Ker}(f)}_{\dim n-1} \oplus \underbrace{\langle b_n \rangle}_{\dim 1} = V$

Ergänze  $b_1$  zu einer Basis  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  von  $\text{Ker}(f)$ .

Dann bilden — weil  $V = \text{Ker}(f) \oplus \langle b_n \rangle$  —  $b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$  eine Basis von  $V$ .

Diese Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  hat genau die gesuchten Eigenschaften

$$f(b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \text{und} \quad f(b_n) = b_1.$$