Aufgabe 1 (Affin-lineare Abbildungen)
Übungsblatt 7

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung f ist genau dann linear, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $f(av_1 + (1-a)v_2) = af(v_1) + (1-a)f(v_2)$ für alle $a \in K$, $v_1, v_2 \in V$, "affin-linear"

(b) $f(0) = 0$.

Sei zunächst $f: V \to W$ eine lineare Abbildung.

- Dann gilt $f(0) = 0$ (denn $f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$ $(v \in V)$)
- Es gilt $f(av_1 + (1-a)v_2) = f(av_1) + f((1-a)v_2) = a f(v_1) + (1-a) f(v_2)$

Sei nun $f: V \to W$ eine Abb. mit den Eigenschaften (a), (b).

<u>Beh</u> f ist linear, d.h. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $f(av_1) = a f(v_1)$ $\forall v_1, v_2 \in V$, $a \in K$.

(a) $f(av_1 + (1-a)v_2) = af(v_1) + (1-a)f(v_2)$ für alle $a \in K$, $v_1, v_2 \in V$,

(b) $f(0) = 0$.

gegeben

- Es gilt $f(av_1) = a \cdot f(v_1)$ für alle $v_1 \in V$, $a \in K$:

  Setze $v_2 = 0$, dann gilt

$$f(av_1) = f(av_1 + (1-a) \cdot v_2) \overset{(a)}{=} a f(v_1) + (1-a) \underbrace{f(v_2)}_{= f(0) \underset{(b)}{=} 0} = a f(v_1).$$

- Gegeben $v_1, v_2 \in V$. Sei $a = \frac{1}{2}$. Dann gilt

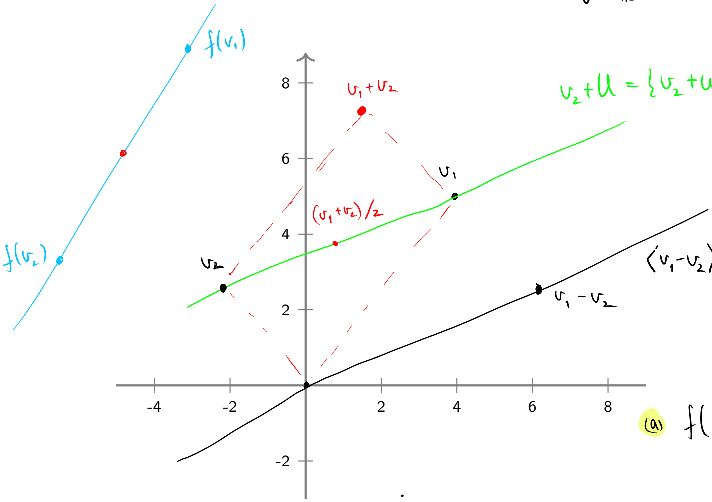
$$f\left(\tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)\right) = f\left(\tfrac{1}{2}v_1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)v_2\right) = f(av_1 + (1-a)v_2) \overset{(a)}{=} \tfrac{1}{2} \cdot f(v_1) + \tfrac{1}{2} f(v_2)$$

$$\shortparallel$$

$$\tfrac{1}{2} f(v_1 + v_2)$$

Es folgt $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

$V=\mathbb{R}^2 \qquad W=\mathbb{R}^2$



$v_2+U=\{v_2+u\ ;\ u\in U\}$ = Parallele zu U durch v_2

= Gerade durch v_1, v_2

$=\{v_2+a(v_1-v_2)\ ;\ a\in\mathbb{R}\}$

$=\{\underline{a v_1+(1-a)v_2}\ ;\ a\in\mathbb{R}\}$

$\langle v_1-v_2\rangle=\{a(v_1-v_2)\ ;\ a\in\mathbb{R}\}=U$

(a) $f(\underbrace{a v_1+(1-a)v_2}) = \underbrace{a f(v_1)+(1-a) f(v_2)}_{\text{"Gerade durch } f(v_1),\, f(v_2)}$

(2) Erfüllt f die Bedingung (a) von Teil (1), und ist $w \in W$, so erfüllt auch die Abbildung $g\colon V \longrightarrow W$, $v \mapsto f(v) + w$, die Bedingung (a).

Wir rechnen

$$g(a v_1 + (1-a) v_2) = f(a v_1 + (1-a) v_2) + w$$

$$\underset{\text{(a) für } f}{=} a f(v_1) + (1-a) f(v_2) + a w + (1-a) w$$

$$= a \underbrace{\left(f(v_1) + w \right)}_{g(v_1)} + (1-a) \underbrace{\left(f(v_2) + w \right)}_{g(v_2)} .$$

(3) Erfüllt f die Bedingung (a), so gibt es eine lineare Abbildung $g : V \longrightarrow W$ und ein $\tilde{w} \in W$ mit $f(v) = g(v) + \tilde{w}$ für alle $v \in V$.

Sei f mit Eigenschaft (a) gegeben.

Wir definieren $\tilde{w} := f(0)$, $\quad g : V \to W,\ g(v) = f(v) - \tilde{w}$.

zz: g ist linear.

Wegen Teil (1) genügt: g hat Eigenschaften (a), (b)

zu (a): folgt aus Teil (2)

zu (b): $g(0) = f(0) - \tilde{w} = 0$.

Der Hauptsatz der affinen Geometrie

Unter einer Gerade (nicht notwendig eine Ursprungsgerade) in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine Teilmenge der Form $v + U$, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein eindim'l UVR sind.

Dann kann man zeigen: Sei $n \geq 2$.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive Abbildung, so dass für jede Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^n$ auch $f(g)$ eine Gerade ist.

Dann gilt: f hat die Eigenschaft (a).