Aufgabe 3, Übungsblatt 3

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

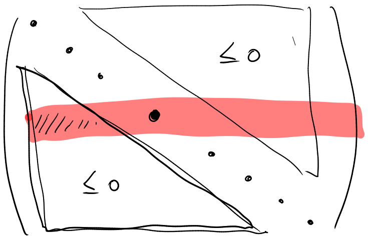
Sei $n \geq 1$, $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, so dass

(a) $a_{ij} \leq 0$ für alle i, j mit $i \neq j$,

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 0$ für alle i,

(c) Für jedes i gilt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ oder es gibt ein j mit $1 \leq j < i$ und $a_{ij} < 0$.

Zeigen Sie, dass dann das LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ eindeutig lösbar ist. ($\Longleftrightarrow$ RZSF von A ist die Einheitsmatrix E_n)

$A =$ 

$\sum \geq 0$ sogar $\sum > 0$, oder es ex. $a_{ij} < 0$, $1 \leq j < i$

Vorüberlegung: Für $i=1$ sagt Bedingung (c), dass $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} > 0$, denn (*)

es gibt kein j mit $1 \leq j < 1$.

Folgerung: $\boxed{a_{11} > 0}$

Begründung:
$$a_{11} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} a_{1j}}_{\leq 0 \text{ (nach (a))}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \underset{(*)}{>} 0 \Rightarrow a_{11} > 0.$$

Behauptung Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist E_n. (genügt, dies zu zeigen)

Beweis durch vollst. Induktion nach n.

IA $n=1$ Dann ist $A = (a_{11}) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$, $a_{11} > 0$, insbes. ist $a_{11} \neq 0$

$\rightsquigarrow$ A hat RZSF $(1) = E_1$ ✓

IS $n>1$ IV: Ist B eine Matrix $\in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$, deren Einträge die Bed. (a),(b),(c) "für $n-1$" erfüllen, so hat B RZSF E_{n-1}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ * & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

wollen wir auf 0 bringen

Ziehe für $i = 2, \ldots, n$ das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile von der i-ten Zeile ab.

Erhalte dadurch Matrix

$$A' = (a'_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{\overset{\shortparallel}{a'_{11}}} & \overset{a_{12}}{\overset{\shortparallel}{a'_{12}}} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $\quad a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i = 2, \dots, n.$

Sei B die Matrix $\quad B = (a'_{ij})_{\substack{i=2,\dots,n \\ j=2,\dots,n}} \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$

Behauptung: B erfüllt die Bedingungen (a), (b), (c) „für Größe $n-1$".

Wenn wir diese Behauptung beweisen können, dann sind wir fertig: Nach IV hat dann B als RZSF die Einheitsmatrix E_{n-1}, d.h. B lässt sich durch elem. Zeilenumf. auf die Matrix E_{n-1} bringen. Wenn wir dieselben Umformungen auf die Zeilen $2, \dots, n$ von A' anwenden, erhalten wir eine Matrix der Form:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilenumf.}} \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \mapsto Z_1 - \cdots Z_i,\ i=2,\dots,n]{Z_1 \mapsto \frac{1}{a_{11}} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_n$$

Beweis, dass $B = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{i=2,\dots,n\\ j=2,\dots,n}}$, $\quad a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$, $\quad \substack{i=2,\dots,n\\ j=2,\dots,n}$)

die Bed. (a), (b), (c) erfüllt.

Bed. (a) zz: $a'_{ij} \leq 0 \quad \forall\, i \neq j$. Es ist $a'_{ij} = \underbrace{a_{ij}}_{\substack{\leq 0\\ \text{((a) für A)}}} - \underbrace{\frac{a_{i1}}{a_{11}}}_{\substack{\leq 0\\ (a_{i1} \leq 0 \text{ wegen (a) für A,}\\ a_{11} > 0)}} \underbrace{a_{1j}}_{\leq 0} \leq 0$

Bed. (b) zz $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a'_{ij} \geq 0$ für alle $i = 2,\dots,n$

Es gilt $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a'_{ij} = \sum_{j=2}^{n} \underbrace{a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}}_{\substack{\| \text{ falls } j=1\\ 0}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{\substack{\geq 0 \\ ((b)\text{ für } A)}} - \underbrace{\frac{a_{i1}}{a_{11}}}_{\leq 0} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}}_{\geq 0} \geq 0 \qquad (**)$$

Spaltenindex in B, d.h. $j \geq 2$

<u>Bed (c)</u> Sei $i \in \{2, \ldots, n\}$. Zu zeigen: $\sum_{j=2}^{n} a'_{ij} > 0$ oder es ex. $j < i$ mit $a'_{ij} < 0$

Wir zeigen: Falls $\sum_{j=2}^{n} a'_{ij} = 0$, so ex $2 \leq j < i$ mit $a'_{ij} < 0$.

Wir sehen an der Gleichungskette $(**)$: Wenn $\sum_{j=2}^{n} a'_{ij} = 0$, dann gilt

① $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ und ② $\frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} = 0$

Wegen ① und Bed (c) für A folgt: es ex. j, $1 \leq j < i$, mit $a_{ij} < 0$.

Falls $j \geq 2$, so benutze $a'_{ij} = \underbrace{a_{ij}}_{<0} - \underbrace{\underbrace{\frac{a_{i1}}{a_{11}}}_{\leq 0} \underbrace{a_{1j}}_{\leq 0}}_{\leq 0} < 0 \rightsquigarrow$ OK.

Gilt $j = 1$, also $a_{i1} < 0$, dann folgt aus ②, dass $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} = 0$

— das steht im Widerspruch zu ⊛