Aufgabe 4, Übungsblatt 11, Charakterisierung der Determinante

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Seien K ein Körper und $\Delta\colon GL_n(K) \longrightarrow K \setminus \{0\}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $A, B \in GL_n(K)$ gilt $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$. (Δ Gruppenhomomorphismus)

(b) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt $\Delta(\mathrm{diag}(1, \dots, 1, a)) = a$. $\left(= \det(\mathrm{diag}(1, \_, 1, a))\right)$

Zeigen Sie, dass dann $\Delta(A) = \det(A)$ für alle $A \in GL_n(K)$ gilt.

(wie det)

Beweis im Fall $n \geq 3$.

$$E_{ij}(a) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & a \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & i \\ j & \end{array} \qquad \det(E_{ij}(a)) = 1.$$

Es gilt

$$E_{i\ell}(a) E_{\ell j}(1) \overbrace{E_{i\ell}(a)^{-1}}^{E_{i\ell}(-a)} E_{\ell j}(1)^{-1} = E_{ij}(a)$$

für alle paarweise verschiedenen i, j, ℓ und alle $a \in K$.

Es folgt $\Delta(E_{ij}(a)) = \Delta\left(E_{i\ell}(a) E_{\ell j}(1) E_{i\ell}(a)^{-1} E_{\ell j}(1)^{-1}\right)$

$$\underset{(a)}{=} \Delta(E_{i\ell}(a))\, \Delta(E_{\ell j}(1))\, \Delta(E_{i\ell}(a))^{-1}\, \Delta(E_{\ell j}(1))^{-1} \quad \in K^\times$$

$$= 1 \in K^\times.$$

Seien nun $i \neq j$, $a \in K$. Weil $n \geq 3$, existiert $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$. Es folgt aus der vorherigen Rechnung, dass $\Delta(E_{ij}(a)) = 1$. Deshalb gilt $\Delta(A) = 1$ für alle $A \in SL_n(K)$.

Sei nun $A \in GL_n(K)$ beliebig. Wir können A schreiben als $A = B \cdot \mathrm{diag}(1, \dots, 1, a)$ mit $B \in SL_n(K)$, $a \in K^\times$ $(a = \det(A))$. Wir erhalten

$$\Delta(A) = \underbrace{\Delta(B)}_{= 1} \underbrace{\Delta(\mathrm{diag}(1, \dots, 1, a))}_{\substack{= a \\ \text{nach Voraussetzung (b)}}} = a = \det(A).$$

Beweis im Fall $n = 2$.

Es gilt dann für alle $\mu \in K \setminus \{0, 1\}$ und alle $\lambda \in K$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{\mu - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass

$$ABA^{-1}B^{-1} = E_{12}(\lambda).$$

Analog für $E_{21}(\lambda)$

Dann kann man dasselbe Argument wie vorher anwenden.

Sonderfall $K = \mathbb{F}_2$ (dann existiert kein $\mu \in K \setminus \{0,1\}$). In diesem Fall ist $K^\times = \{1\}$.

Dann muss $\Delta(A) = 1$ und $\det(A) = 1$ für alle $A \in GL_n(K)$.