Aufgabe 1, Übungsblatt 10, der Satz von Cayley

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

Universität Duisburg Essen

Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen. Zeigen Sie, dass es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to S_n$ von G in die symmetrische Gruppe S_n gibt.

Beispiel

$G = \{A, B, C, D, E, F\}$

	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	A	D	C	F	E
C	C	E	A	F	B	D
D	D	F	B	E	A	C
E	E	C	F	A	D	B
F	F	D	E	B	C	A

$C \cdot D = F$

Beispiel

"Elemente von G durchnummerieren" $A = g_1$, $B = g_2$, - -

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_1	g_4	g_3	g_6	g_5
g_3	g_3	g_5	g_1	g_6	g_2	g_4
g_4	g_4	g_6	g_2	g_5	g_1	g_3
g_5	g_5	g_3	g_6	g_1	g_4	g_2
g_6	g_6	g_4	g_5	g_2	g_3	g_1

Beispiel

Besser: fixiere Bijektion $G \to \{1, \ldots, n\}$, d.h. identifiziere G mit $\{1, \ldots, n\}$

$\diamond$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	5	1	6	2	4
4	4	6	2	5	1	3
5	5	3	6	1	4	2
6	6	4	5	2	3	1

$3 \diamond 4 = 6$

Beispiel

$G = \{1, \ldots, 6\}$

$\diamond$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	5	1	6	2	4
4	4	6	2	5	1	3
5	5	3	6	1	4	2
6	6	4	5	2	3	1

- jede Zeile kann betrachtet werden als Permutation $\in S_6$

  $\rightsquigarrow$ Abb. $G \to S_6$
- alle Zeilen liefern unterschiedliche Permutation

  $\rightsquigarrow$ diese Abbildung ist injektiv.

Ziel: injektiver Homomorphismus $G \longrightarrow S_6$

Homomorphismus-Eig sieht man nicht so gut an der Tabelle (benötigt Assoziativgesetz)

Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen. Zeigen Sie, dass es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to S_n$ von G in die symmetrische Gruppe S_n gibt.

Wir identifizieren G mit der Menge $\{1, \dots, n\}$.

Für $g \in G$ sei $m_g : G \to G$ die Abbildung $x \mapsto gx$.

<u>Beh.</u> Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung m_g <u>bijektiv</u>.

<u>Begr.</u> Weil G endlich ist, genügt es, die Injektivität zu zeigen.

Seien also $x, y \in G$ mit $m_g(x) = m_g(y)$, d.h. $gx = gy$.

Multipliziere von links mit g^{-1}. Es folgt $x = y$.

Wir erhalten eine Abbildung

$$\Phi : G \to \mathrm{Bij}(G) = \mathrm{Bij}(\{1, \dots, n\}) = S_n .$$
$$g \mapsto m_g$$

- Φ ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h. für alle $g, g' \in G$ gilt

$$m_{gg'} = \Phi(gg') = \Phi(g) \circ \Phi(g') = m_g \circ m_{g'}$$

In der Tat: $m_{gg'}(x) = (gg')x \underset{\text{Assoziativität}}{=} g(g'x) = m_g(\underbrace{g'x}) = m_g(m_{g'}(x))$

$$= (m_g \circ m_{g'})(x)$$

für alle $x \in G$.

- Φ ist injektiv. Weil Φ ein Homomorphismus, genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(\Phi)$ trivial ist, also nur aus dem neutralen Elem. e von G besteht.
Sei dann $g \in G$ mit $\Phi(g) = \mathrm{id}$, d.h. für alle $x \in G$ gilt $gx = m_g(x) = x$

Für $x = e$ also $\quad g = ge = e$.