Aufgabe 1, Übungsblatt 1, Charakterisierungen Injektiv, Surjektiv

Ulrich Görtz

Lineare Algebra 1, WS 20/21

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $f^{-1}(f(S)) = S$ für alle $S \subseteq X$.

(2) Es sind äquivalent:

  (i) Die Abbildung f ist surjektiv,

  (ii) $f(f^{-1}(T)) = T$ für alle $T \subseteq Y$,

  (iii) $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

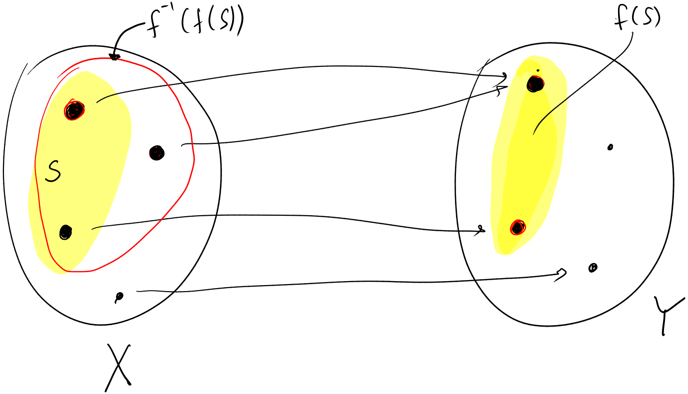
$$\begin{array}{ccc} f: X & \longrightarrow & Y \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ S & & T \end{array}$$

$$f(S) = \{ f(s) \,;\, s \in S \} \subseteq Y$$

$$f^{-1}(T) = \{ x \in X \,;\, f(x) \in T \} \subseteq X$$

Vorüberlegung $f^{-1}(f(S))$

$S \subseteq X \qquad f: X \to Y$



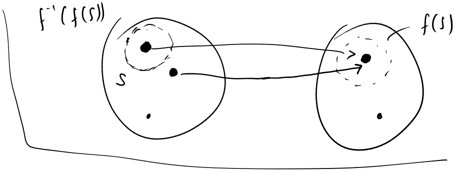
Beobachtung $\quad S \subseteq f^{-1}(f(S))$, aber es gilt nicht unbedingt $=$

Vorüberlegung $f^{-1}(f(S))$

Lemma Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $S \subseteq X$ eine Teilmenge.
Dann gilt $S \subseteq f^{-1}(f(S))$.

Beweis Es ist $f^{-1}(\underbrace{f(S)}) = \{x \in X \,;\, f(x) \in \underbrace{f(S)}\}$
Ist $s \in S$, so ist $f(s) \in f(S)$, also $s \in f^{-1}(f(S))$.

Teil (I), es sind äquivalent:



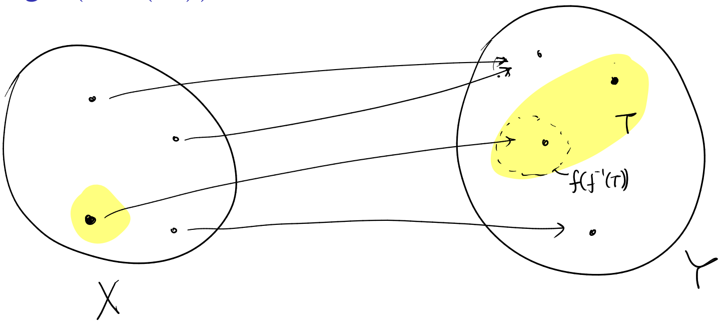
(i) die Abbildung f ist injektiv,

(ii) $f^{-1}(f(S)) = S$ für alle $S \subseteq X$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei f injektiv. Wissen bereits: $S \subseteq f^{-1}(f(S))$.
Also gzz: $f^{-1}(f(S)) \subseteq S$. Sei $x \in f^{-1}(f(S))$. zz: $x \in S$.
Es gilt dann $f(x) \in f(S) = \{ f(s) \,;\, s \in S \}$, d.h. $f(x) = f(s)$
für ein Element $s \in S$. Weil f injektiv ist, folgt $x = s \in S$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. zz: $x = x'$.
Setzen $S := \{x\}$. Dann gilt $x' \in f^{-1}(f(S))$, denn $f(x') \in f(S) = \{f(x)\} = \{f(x')\}$,
Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(f(S)) = S = \{x\}$. Aus $x' \in \{x\}$ folgt $x' = x$.

Vorüberlegung $f(f^{-1}(T))$



Beobachtung $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$ und $f(f^{-1}(T)) \subseteq f(X)$

insbesondere kann es passieren, dass $f(f^{-1}(T)) \neq T$.

Vorüberlegung $f(f^{-1}(T))$

<u>Lemma</u> Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $T \subseteq Y$ eine Teilmenge.

Dann gilt $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$.

<u>Beweis</u> Sei $y \in f(\underline{f^{-1}(T)})$, also $y = f(x)$ mit $x \in \underline{f^{-1}(T)}$.

Dass $x \in f^{-1}(T)$, bedeutet $f(x) \in T$. Also $y = f(x) \in T$.

Teil (2), es sind äquivalent:

(i) Die Abbildung f ist surjektiv,

(ii) $f(f^{-1}(T)) = T$ für alle $T \subseteq Y$,

(iii) $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) klar
- (iii) $\Rightarrow$ (i). Es gilt $f^{-1}(Y) = X$ und zu sagen, dass $f(X) = Y$ ist, bedeutet genau, dass f surjektiv ist.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $T \subseteq Y$ eine Teilmenge. Wir wissen schon, dass $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$.

bzw: $T \subseteq f(f^{-1}(T))$. Sei $t \in T$. zu zeigen: $t \in f(f^{-1}(T))$.

Weil f surjektiv ist, existiert $x \in X$ mit $f(x) = t$.

Weil $f(x) = t \in T$, ist $x \in f^{-1}(T)$. Folglich ist $t = f(x) \in f(f^{-1}(T))$.