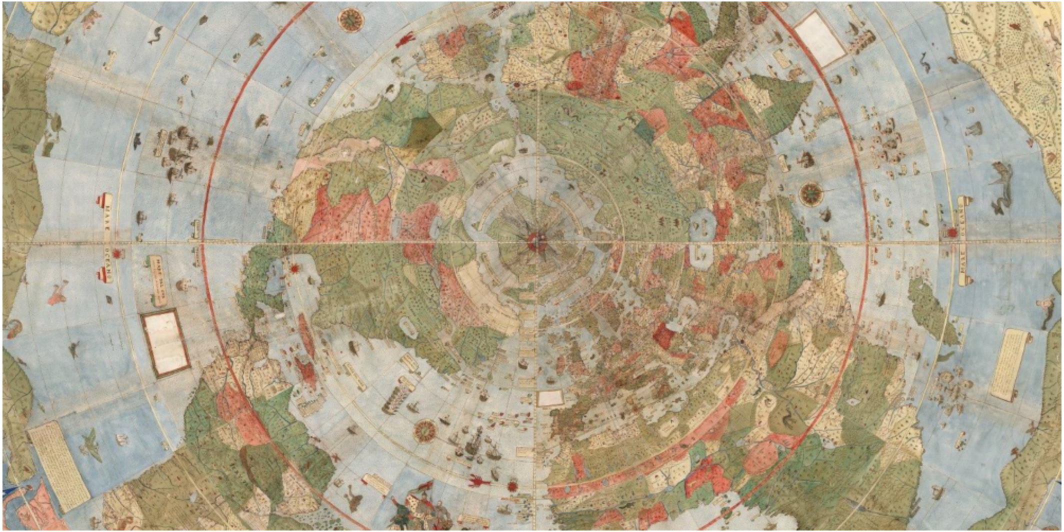
Klassifikation und Symmetrie -
- der Nutzen der Geometrie für die Zahlentheorie

Ulrich Görtz

Die Kleine Form, WS 21/22

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

Universität Duisburg Essen



Ausschnitt der Weltkarte von Urbano Monte, 1587, David Rumsey Map Collection

Ausschnitt der Weltkarte von Urbano Monte, 1587, David Rumsey Map Collection CC-BY-NC-SA 3.0

Diophantische Gleichungen

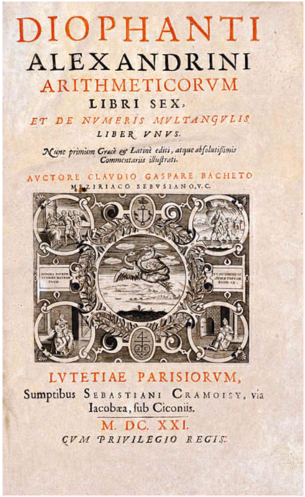


Abb.: Wikipedia/gemeinfrei

Diophantische Gleichungen

Zahlentheorie:

- Polynomiale Gleichungen
  - $x^2 = 9$,
  - $a^2 + b^2 = c^2$,
  - $a^3 + b^3 = c^3$,
  - ...

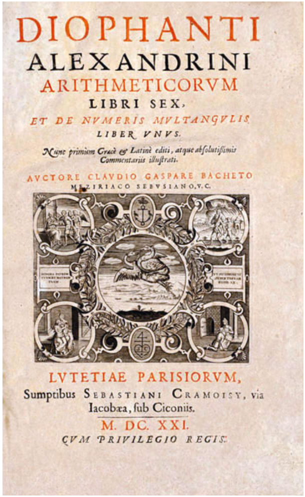


Abb.: Wikipedia/gemeinfrei

Diophantische Gleichungen

Zahlentheorie:

- Polynomiale Gleichungen
  - $x^2 = 9$,
  - $a^2 + b^2 = c^2$,
  - $a^3 + b^3 = c^3$,
  - ...
- Als Lösungen erlauben wir
  - ganze Zahlen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
  - oder manchmal Bruchzahlen: $-\frac{7}{2}$, -2, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{31}{911}$, ...

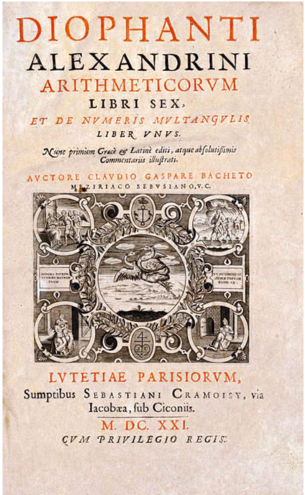
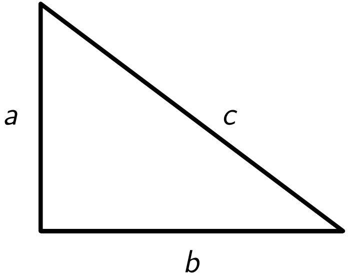

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Abb.: Wikipedia/gemeinfrei

Pythagoreische Zahlentripel

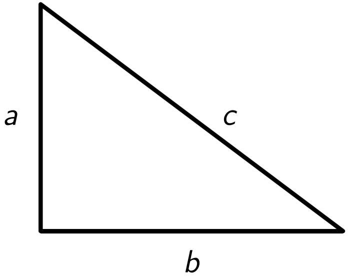
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagoreische Zahlentripel



$$a^2 + b^2 = c^2$$

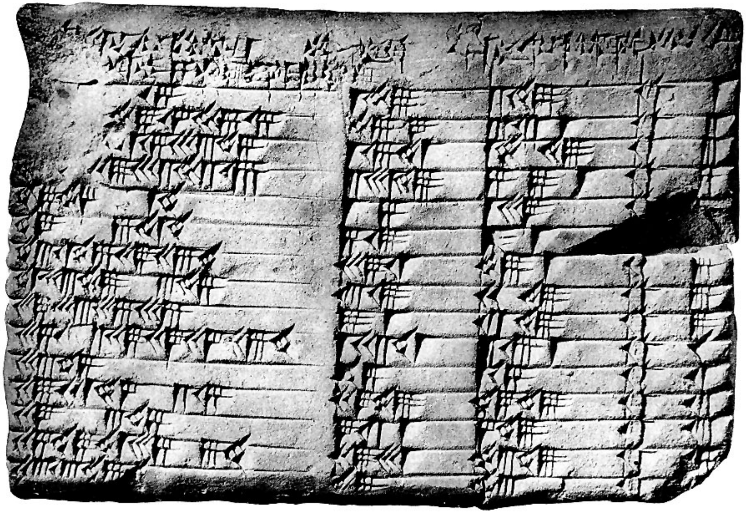
Pythagoreische Zahlentripel



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beispiele:

- $3^2 + 4^2 = 5^2$,
- $9^2 + 12^2 = 15^2$,
- ...



Die Keilschrifttafel *Plimpton 322*, ca. 1800 v. Chr., Bildquelle: Wikipedia/gemeinfrei.

Pythagoreische Zahlentripel

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad c \neq 0.$$

Für $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gilt dann

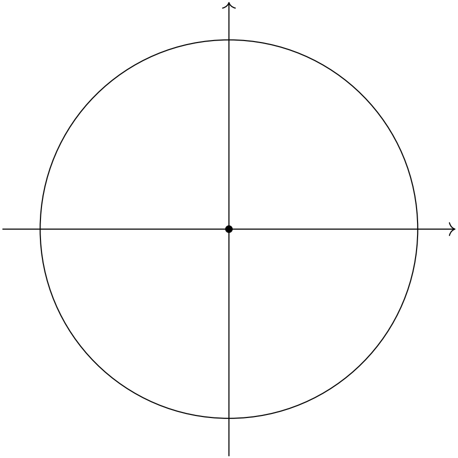
$$x^2 + y^2 = 1$$

Pythagoreische Zahlentripel

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad c \neq 0.$$

Für $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gilt dann

$$x^2 + y^2 = 1$$

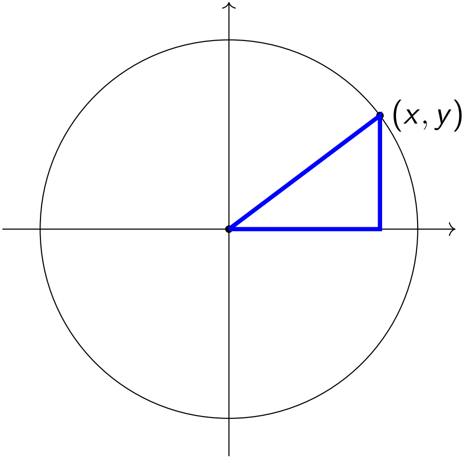


Pythagoreische Zahlentripel

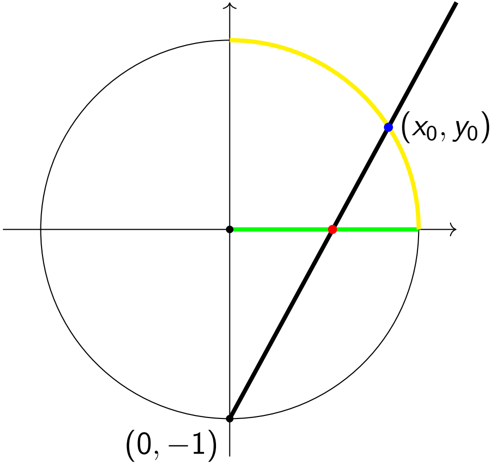
$$a^2 + b^2 = c^2, \quad c \neq 0.$$

Für $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gilt dann

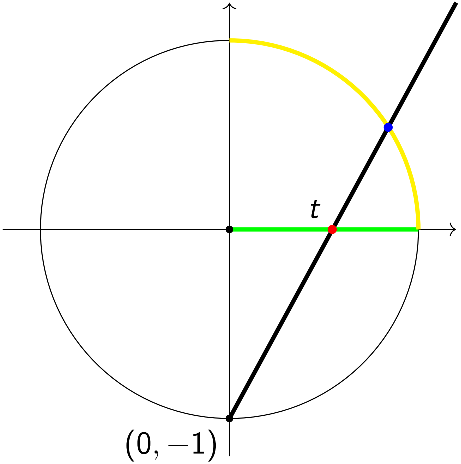
$$x^2 + y^2 = 1$$



Stereographische Projektion I



Stereographische Projektion II



Satz

1. *Seien m, n teilerfremde natürliche Zahlen, von denen eine gerade ist. Es sei $n > m$. Dann ist*

$$(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$$

ein primitives Pythagoreisches Zahlentripel.

Satz

1. *Seien m, n teilerfremde natürliche Zahlen, von denen eine gerade ist. Es sei $n > m$. Dann ist*
$$(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$$
ein primitives Pythagoreisches Zahlentripel.
2. *Sei (a, b, c) ein primitives Pythagoreisches Zahlentripel, und sei a gerade. Dann gibt es Zahlen m, n wie in Teil (1), so dass*
$$a = 2mn, \quad b = n^2 - m^2, \quad c = n^2 + m^2.$$

Kongruente Zahlen

Frage

Für welche natürlichen Zahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ existiert ein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seitenlängen und Flächeninhalt n?

Wir nennen n eine *kongruente Zahl*, wenn ein solches Dreieck existiert.

Kongruente Zahlen

Frage

Für welche natürlichen Zahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ existiert ein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seitenlängen und Flächeninhalt n?

Wir nennen n eine *kongruente Zahl*, wenn ein solches Dreieck existiert.

Sind a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks, so muss gelten:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{und} \qquad n = \frac{1}{2}ab.$$

Kongruente Zahlen

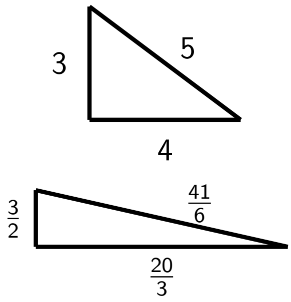
Frage

Für welche natürlichen Zahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ existiert ein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seitenlängen und Flächeninhalt n?

Beispiele

6 ist kongruent: $3^2 + 4^2 = 5^2$, $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

5 ist kongruent: $(\frac{3}{2})^2 + (\frac{20}{3})^2 = (\frac{41}{6})^2$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{20}{3} = 5$.



Satz (Fermat 1659)

Die Zahl 1 *ist keine kongruente Zahl.*

Allgemeiner: Wenn n *eine Quadratzahl ist, dann ist* n *nicht kongruent.*

Satz (Fermat 1659)

Die Zahl 1 *ist keine kongruente Zahl.*

Allgemeiner: Wenn n *eine Quadratzahl ist, dann ist* n *nicht kongruent.*

Beispiel (Zagier 1989)

Die Zahl 157 *ist kongruent.*

Das Dreieck mit den folgenden Seitenlängen a, b, c *hat Flächeninhalt* 157*:*

Satz (Fermat 1659)

Die Zahl 1 *ist keine kongruente Zahl.*

Allgemeiner: Wenn n eine Quadratzahl ist, dann ist n nicht kongruent.

Beispiel (Zagier 1989)

Die Zahl 157 *ist kongruent.*

Das Dreieck mit den folgenden Seitenlängen a, b, c hat Flächeninhalt 157*:*

$$a = \frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203}$$

$$b = \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610}$$

$$c = \frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}$$

Eine alternative Beschreibung kongruenter Zahlen

Eine Zahl n ist genau dann kongruent, wenn die Gleichung

$$y^2 = x^3 - n^2 x$$

eine Lösung (x, y) mit rationalen Zahlen x, y und $y \neq 0$ hat.

Eine alternative Beschreibung kongruenter Zahlen

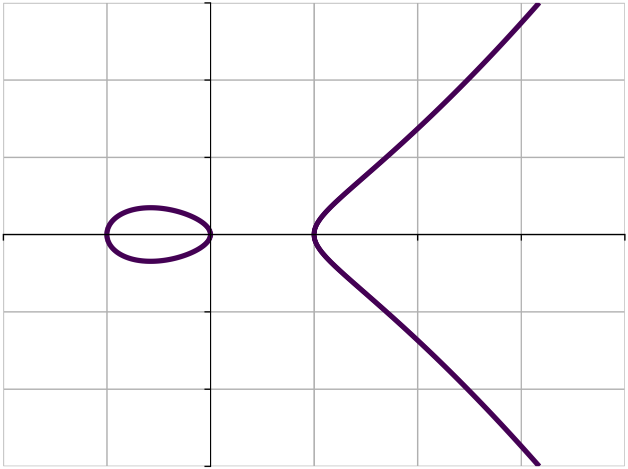
Eine Zahl n ist genau dann kongruent, wenn die Gleichung

$$y^2 = x^3 - n^2 x$$

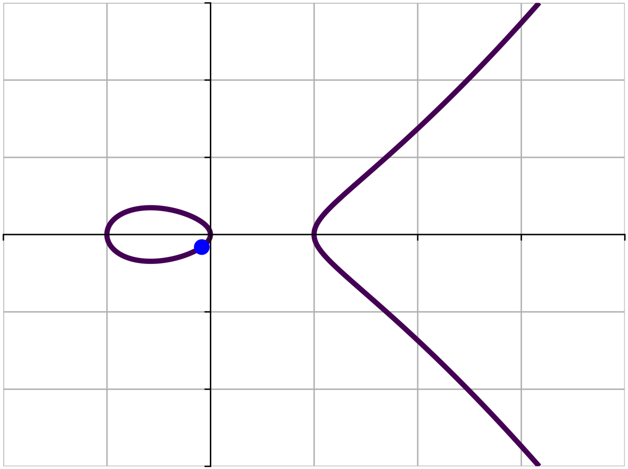
eine Lösung (x, y) mit rationalen Zahlen x, y und $y \neq 0$ hat.

Schwieriger: n ist genau dann kongruent, wenn die obige Gleichung unendlich viele Lösungen (x, y) mit rationalen Zahlen x, y hat.

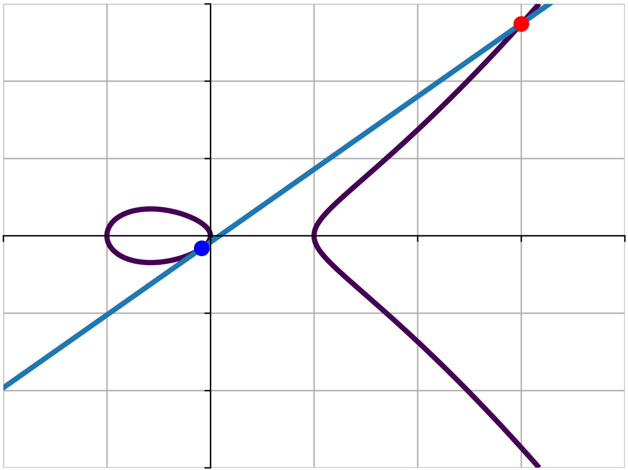
Elliptische Kurven



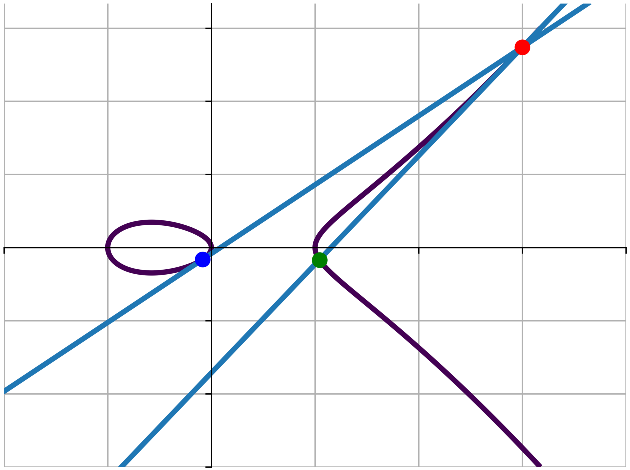
Elliptische Kurven



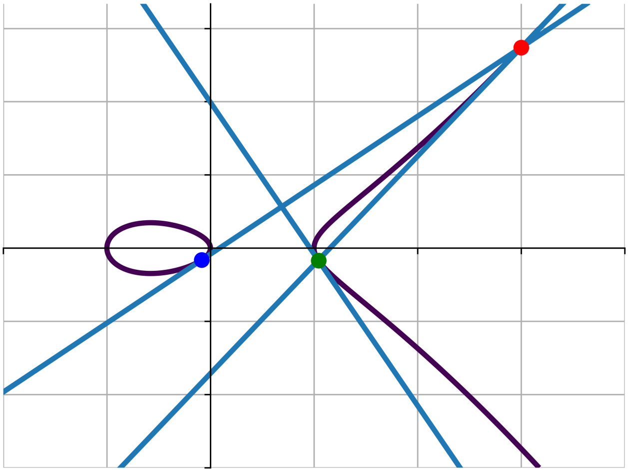
Elliptische Kurven



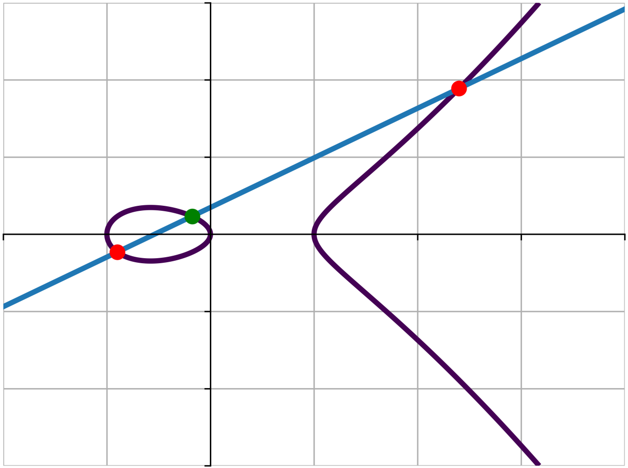
Elliptische Kurven



Elliptische Kurven



Elliptische Kurven



Langlands-Programm

Algebra

(Polynom-)Gleichungen,

Nullstellen von Polynomen,

$\longleftrightarrow$

Analysis

Differentialrechnung,

„Kurvendiskussion“

Robert Langlands
(1936–),
Abelpreis 2018

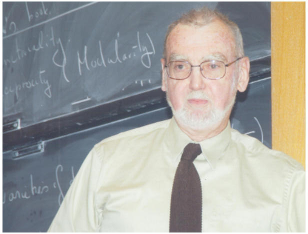
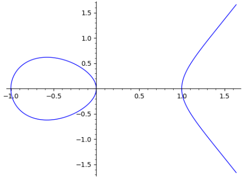


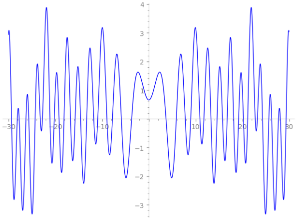
Foto:

J. Mozzochi, R. Langlands, CC BY-SA 3.0

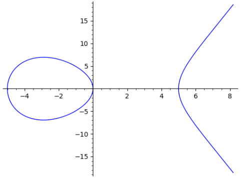
Elliptische Kurven und ihre L-Funktionen

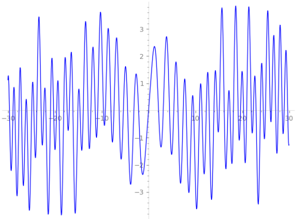
(A) $y^2 = x^3 - x^2$.





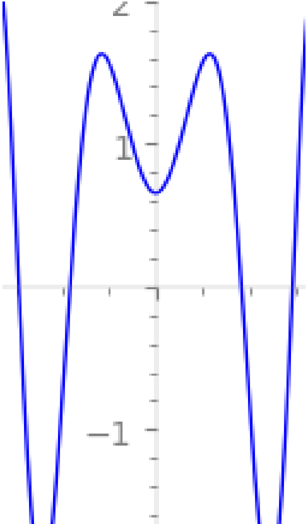
(B) $y^2 = x^3 - 25x^2$.



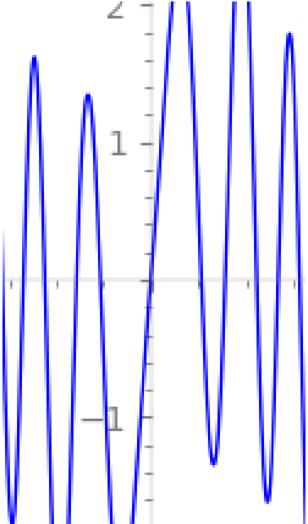


Elliptische Kurven und ihre L-Funktionen

(A) $y^2 = x^3 - x^2$.

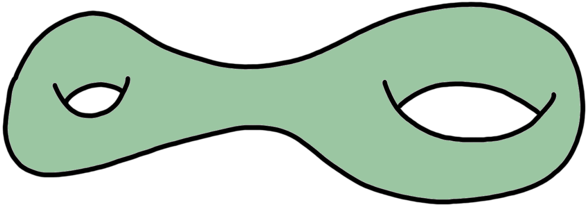


(B) $y^2 = x^3 - 25x^2$.

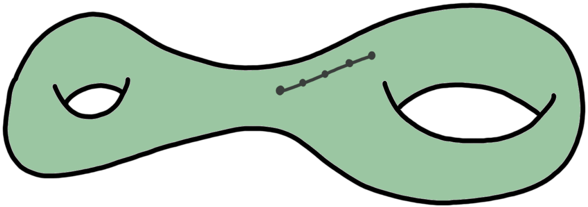


Parameterräume elliptischer Kurven

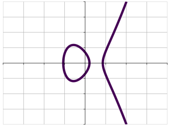
Parameterräume elliptischer Kurven

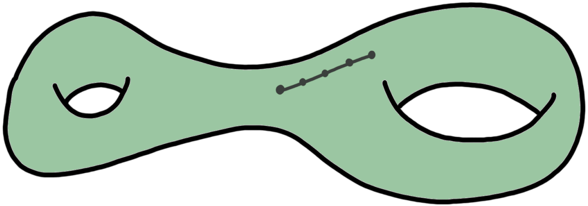


Parameterräume elliptischer Kurven

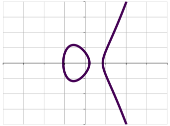


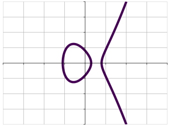
Parameterräume elliptischer Kurven

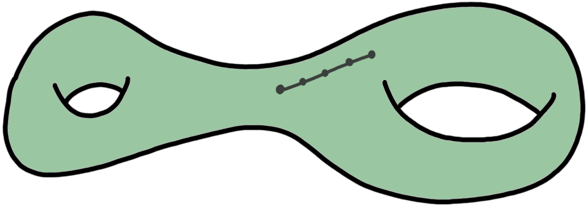




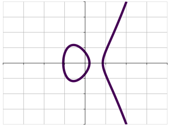
Parameterräume elliptischer Kurven

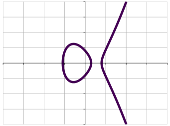


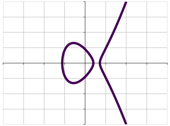


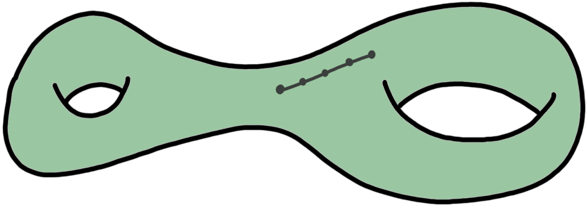


Parameterräume elliptischer Kurven

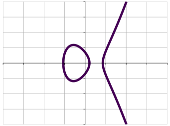


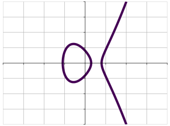


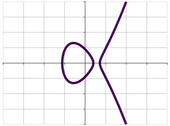


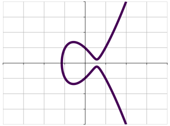


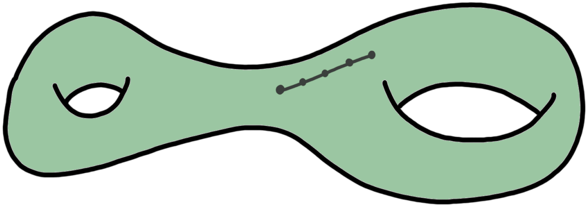
Parameterräume elliptischer Kurven



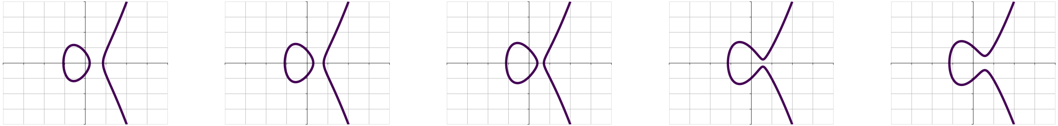


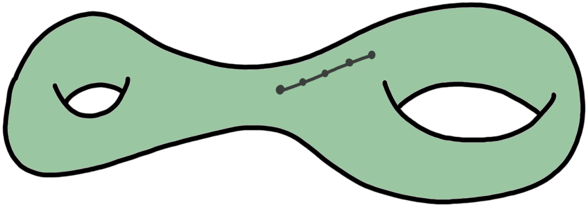




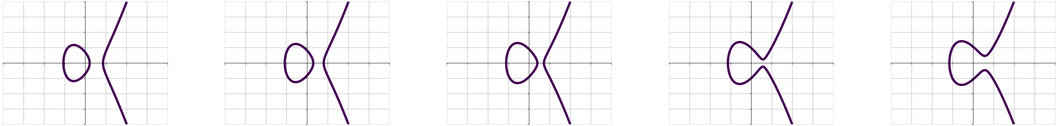


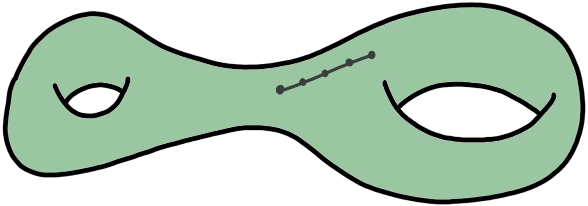
Parameterräume elliptischer Kurven





Parameterräume elliptischer Kurven





Symmetrien der Parameterräume erlauben es, die „Langlands-Korrespondenz“ (in einigen Fällen) zu realisieren.

Wozu ist das gut?

Warum beschäftigen wir uns damit?

Faszinierend,

- Probleme zu verstehen, die seit mehr als 1000 Jahren untersucht werden,
- überraschende Zusammenhänge konzeptionell zu verstehen,
- diese Kenntnisse in der Lehre weiterzugeben.

Wozu ist das gut?

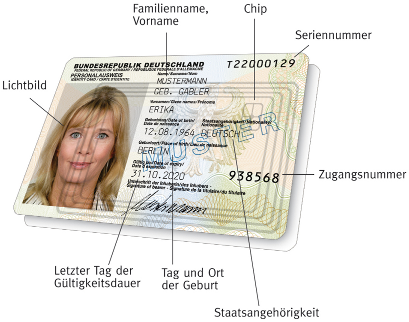
(Polynom-)Gleichungen sind „überall“:

- Kryptographie mit elliptischen Kurven
- Theoretische Physik
- Informatik
- Biochemie
- ...

Wozu ist das gut?

(Polynom-)Gleichungen sind „überall“:

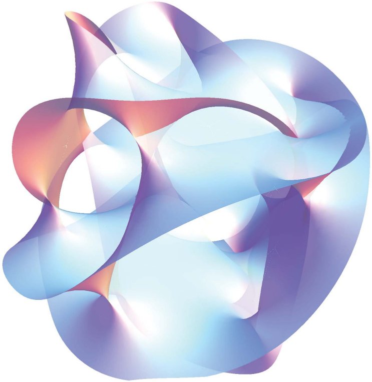
- Kryptographie mit elliptischen Kurven
- Theoretische Physik
- Informatik
- Biochemie
- ...



Wozu ist das gut?

(Polynom-)Gleichungen sind „überall“:

- Kryptographie mit elliptischen Kurven
- Theoretische Physik
- Informatik
- Biochemie
- ...



Wozu ist das gut?

(Polynom-)Gleichungen sind „überall“:

- Kryptographie mit elliptischen Kurven
- Theoretische Physik
- Informatik
- Biochemie
- ...

A HILBERT SCHEME IN COMPUTER VISION

CHRIS AHOLT, BERND STURMFELS AND REKHA THOMAS

ABSTRACT. Multiview geometry is the study of two-dimensional images of three-dimensional scenes, a foundational subject in computer vision. We determine a universal Gröbner basis for the multiview ideal of n generic cameras. As the cameras move, the multiview varieties vary in a family of dimension $11n-15$. This family is the distinguished component of a multigraded Hilbert scheme with a unique Borel-fixed point. We present a combinatorial study of ideals lying on that Hilbert scheme.

Wozu ist das gut?

(Polynom-)Gleichungen sind „überall“:

- Kryptographie mit elliptischen Kurven
- Theoretische Physik
- Informatik
- Biochemie
- ...

BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 53, Number 2, April 2016, Pages 217–268
http://dx.doi.org/10.1090/bull/1524
Article electronically published on February 3, 2016

MODULI SPACES AND MACROMOLECULES

R. C. PENNER

ABSTRACT. Techniques from moduli spaces are applied to biological macromolecules. The first main result provides new a priori constraints on protein geometry discovered empirically and confirmed computationally. The second