SEMINAR ÜBER SPIEGELUNGSGRUPPEN

U. GÖRTZ, WS 2009/10

Das Thema des Seminars sind Gruppen, die in natürlicher Weise mit der Geometrie euklidischer oder affiner Vektorräume in Verbindung stehen. In erster Linie beschäftigen wir uns mit endlichen Spiegelungsgruppen. Gruppen und ihre Aktionen auf geometrischen Objekten sind der Weg der Mathematik, über Symmetrie zu sprechen. Man kann also ebenso gut sagen, dass sich das Seminar mit verschiedenen Formen von Symmetrie beschäftigt. Durch diesen Bezug zur Geometrie wird der abstrakte Begriff der Gruppe besonders anschaulich.

Spiegelungsgruppen sind Untergruppen der orthogonalen Gruppe eines euklidischen Vektorraums, die von Spiegelungen erzeugt werden. Dies ist einerseits ein klassisches und mit elementaren Methoden zugängliches, aber auch interessantes und nach wie vor wichtiges Thema. Zusätzlich gibt es Vorträge über die platonischen Körper und Pflasterungen der Ebene, bedeutsamen Themen, die sich gut in das Seminar einfügen.

Das fundamentale Ergebnis, das wir im Seminar behandeln werden ist die Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen: man kann eine vollständige Liste aller Spiegelungsgruppen angeben. Wir klassifizieren auch die platonischen Körper und die kristallographischen Gruppen der Ebene.

Programm

1. **Gruppenaktionen.** Wir beginnen mit den grundlegenden Begriffen der Gruppentheorie, die für alles Folgende unabdingbar sind (und kommentarlos benutzt werden können/sollen).

Inhalt des Vortrags: Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Gruppe, Untergruppe, Homomorphismus, Stabilisator. Bahnengleichung. Permutationsgruppen. Beispiele. [Art], 5.5, 5.6, 5.7.

Ergänzende Literatur: [Bo] 1.1, 1.2, 5.1; [Arm].

2. **Die platonischen Körper.** Die platonischen Körper waren, wie der Name andeutet, schon in der Antike bekannt und werden beispielsweise in den *Elementen* von Euklid besprochen. Wir zeigen mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel, dass es (höchstens) 5 solche reguläre Polyeder gibt.

Inhalt des Vortrags: Definition und Klassifikation der 3-dimensionalen regulären Polyeder ("platonische Körper"), [Au], IV.4, IV.5.

Ergänzende Literatur: [Co] Ch. 10.

3. **Die orthogonale Gruppe $O(\mathbb{R}^3)$ und ihre endlichen Untergruppen.** *Inhalt des Vortrags:* [GB] Ch. 2. (Die Abschnitte 2.1 und 2.3 sind aus der Vorlesung bekannt und sollten dementsprechend nur knapp wiederholt werden.) Der Fall der $O(\mathbb{R}^2)$ sollte "zum Aufwärmen" kurz besprochen werden.

Ergänzende Literatur: Zu den Symmetriegruppen der platonischen Körper: [Arm] Ch. 8.

4. **Spiegelungen und Wurzelsysteme.** In den folgenden Vorträgen betrachten wir spezielle endliche Untergruppen der orthogonalen Gruppe, die von *Spiegelungen* erzeugt werden.

Inhalt des Vortrags: Definition von Spiegelungen. Beispiele für Spiegelungsgruppen. Wurzelsysteme. [Hu] 1.1, 1.2.

5. **Positive und einfache Systeme.** *Inhalt des Vortrags:* Systeme einfacher und positiver Wurzeln; Existenz eines Systems einfacher Wurzeln. Je zwei Systeme einfacher (bzw. positiver) Wurzeln sind zueinander konjugiert. Die Gruppe W wird von einfachen Spiegelungen erzeugt. [Hu] 1.3–1.5.

Ergänzende Literatur: [GB] 4.1.

6. **Die Längenfunktion; Darstellung durch Erzeugende und Relationen.** *Inhalt des Vortrags:* Definition und verschiedene Charakterisierungen der Längenfunktion. Die Streichungsbedingung und die Austauschbedingung. Die Operation von W auf der Menge der einfachen Systeme ist einfach transitiv. Darstellung durch Erzeugende und Relationen. [Hu] 1.6–1.9.

7. **Fundamentalbereiche.** *Inhalt des Vortrags:* Definition des Begriffs des Fundamentalbereichs; Fundamentalbereiche für Spiegelungsgruppen. Beispiele. Alle Spiegelungen in W sind von der Form s_α. [Hu] 1.12, 1.14.

Ergänzende Literatur: Vergleiche [GB] Ch. 3, 4.2.

8. **Coxeter-Graphen.** In diesem und den nächsten Vorträgen geht es um die Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen—wir werden sehen, dass es abgesehen von den schon behandelten Beispielen kaum noch weitere dieser Gruppen gibt. Das entscheidende Hilfsmittel zur Klassifikation ist der sogenannte Coxeter-Graph, den man einer Spiegelungsgruppe zuordnen kann.

Inhalt des Vortrags: Definition des Coxetergraphen; dieser bestimmt die Spiegelungsgruppe. Irreduzible Systeme, Produktzerlegung. Die zu einem Coxetergraph gehörige Bilinearform. Beispiele. [Hu] 2.1–2.4

Ergänzende Literatur: [GB] 5.1; vergleiche auch [Hu] 1.9.

9. **Positiv definite Graphen.** *Inhalt des Vortrags:* Positiv semi-definite Graphen. Untergraphen. Klassifikation aller positiv definiten Graphen. [Hu] 2.5–2.7

Ergänzende Literatur: [GB] 5.1.

10. **Konstruktion von Wurzelsystemen.** *Inhalt des Vortrags:* Die kristallographische Bedingung. Konstruktion der kristallographischen Wurzelsysteme. Die Ordnung der Spiegelungsgruppe. [Hu] 2.8, 2.10, 2.11 und eine Auswahl aus 2.12 und 2.13.

Ergänzende Literatur: [GB] 5.3.

11. **Kristallographische Gruppen der Ebene.** In den letzten beiden Vorträgen geht es um gewisse unendliche Untergruppen der euklidischen Gruppe der Ebene, d. h. der Automorphismengruppe der affinen Ebene. Diese kristallographischen Gruppen werden auch Parkettmustergruppen (englisch: "wallpaper groups") genannt.

Inhalt des Vortrags: Wiederholung der Definition und Struktur der euklidischen Gruppe. Definition der betrachteten Gruppen; Definition und Diskussion der Translationsuntergruppe (des Gitters) und der Punktgruppe. Beispiele. [Arm] Ch. 24, 25.

Ergänzende Literatur: [Co], Ch. 4

12. **Klassifikation der kristallographischen Gruppen der Ebene.** Zum Abschluss besprechen wir die Klassifikation der kristallographischen Gruppen der Ebene: es gibt 17 solcher Gruppen.

Inhalt des Vortrags: Beweis des Klassifikationssatzes; Beispiele, wie die Klassifikation in der Praxis funktioniert. [Arm] Ch. 26.

Ergänzende Literatur: [Co], Ch. 4

Literatur

[Arm] M. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer UTM 1988.
[Art] M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser 1993.
[Au] M. Audin, *Geometry*, Springer Universitext 2002.
[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer.
[Co] H. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley 1969.
[GB] L. Grove, C. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd ed., Springer GTM **99**, 1985
[Hu] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in adv. math. **29**, Cambridge Univ. Press 1990.