SEMINAR ZUR ALGEBRA

U. GÖRTZ, SS 2010

Einführung

Sei k ein Körper. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl und seien $a_1, \dots, a_n \in k^\times$. Das Grundthema des Seminars ist die Lösbarkeit der Gleichung

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + \cdots + a_n X_n^2 = 0.$$

Damit ist gemeint, ob es außer der *trivialen Lösung* $x_1 = \cdots = x_n = 0$ weitere Lösungen durch Elemente von k gibt. Ist zum Beispiel $k = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen, so sehen wir, dass eine nicht-triviale Lösung genau dann existiert, wenn nicht alle a_i dasselbe Vorzeichen haben. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gibt es stets nicht-triviale Lösungen.

Ist k ein endlicher Körper, so ist die Frage der Lösbarkeit nicht so einfach zu beantworten. Im ersten Vortrag zeigen wir als Konsequenz des Satzes von Chevalley und Warning, dass immer eine nicht-triviale Lösung existiert, wenn $n \geq 3$. Der Fall $n = 2$ hängt eng mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz zusammen, das wir im zweiten Vortrag behandeln.

Der Fall $k = \mathbb{Q}$, der Körper der rationalen Zahlen, ist noch wesentlich komplizierter, und der größte Teil des Seminars widmet sich der Untersuchung dieses Falles. Das entscheidende Hilfsmittel sind die Körper der p-adischen Zahlen (p eine Primzahl), gewisse Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$, in denen man, wie im Körper der reellen Zahlen, analytische Methoden zur Lösung von Gleichungen einsetzen kann. Das Hauptergebnis des Seminars ist der Satz von Hasse-Minkowski, der besagt, dass die Lösbarkeit der obigen Gleichung (mit $a_i \in \mathbb{Q}^\times$) in allen Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}_p$ für alle Primzahlen p die Lösbarkeit in $\mathbb{Q}$ impliziert. Eine Folgerung ist der Satz von Meyer, dass die obige Gleichung, sofern $n \geq 5$ und eine Lösung in $\mathbb{R}$ existiert, eine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat.

Diese tiefliegende Strukturaussage wenden wir im letzten Vortrag an, um zum Beispiel den Satz von Lagrange, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen schreiben lässt, zu beweisen.

Vorbesprechung. Do, 4.2.2010, 9:00 Uhr in T03 R03 D75.

Zielgruppe. Das Seminar richtet sich an Diplom-, Bachelor- und Lehramtsstudenten.

Voraussetzungen. Gute Grundstudiumskenntnisse (Lineare Algebra, insbesondere: symmetrische Bilinearformen; Analysis: topologische Räume, Kompaktheit, metrische Räume). Gute Kenntnisse in Algebra (wir brauchen keine Galois-Theorie, aber die Grundbegriffe müssen *sehr gut vertraut* sein, insbesondere: Gruppen, Homomorphiesatz, Ringe, Restklassenringe, Körper, Quotientenkörper eines Integritätsringes, Sprechweise der Kongruenzen). Kenntnisse über (algebraische) Zahlentheorie sind nützlich, aber nicht erforderlich.

Schließlich, und am wichtigsten: die Motivation, sich ein interessantes (aber nicht einfaches) mathematisches Thema anzueignen.

Literatur. Wir richten uns nach dem Buch *A course in arithmetic* von Jean-Pierre Serre [S]. Soweit nicht etwas anderes angegeben ist, beziehen sich alle Referenzen auf dieses Buch. Als Ergänzung kann man zu vielen Vorträgen das Buch [MSP] von Müller-Stach und Piontkowski heranziehen.

Programm

1. **Endliche Körper und der Satz von Chevalley-Warning.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt I.1 über endliche Körper — dieser Stoff sollte aus der Algebra-Vorlesung bekannt sein und soll daher nur *kurz* wiederholt werden. Danach Abschnitt I.2: der Satz von Chevalley-Warning über die Nullstellenmenge eines Gleichungssystems von Polynomen "mit kleinem Grad".

Ergänzende Literatur: Bosch [Bo].

2. **Das quadratische Reziprozitätsgesetz.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt I.3, das quadratische Reziprozitätsgesetz, ein berühmtes Ergebnis der Zahlentheorie, dessen (weitreichende) Verallgemeinerungen auch Gegenstand aktueller Forschung sind. Die Umschreibung von Theorem 4 durch eine kurze exakte Sequenz lassen wir aus. Wir verzichten auf den alternativen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes aus dem Anhang.

3. **Der Ring $\mathbb{Z}_p$ und der Körper $\mathbb{Q}_p$.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt II.1. Der Begriff des projektiven Limes soll sauber eingeführt werden. Erläutern Sie die Bemerkungen nach Proposition 4 ausführlich.

Ergänzende Literatur: Neukirch [N].

4. **p-adische Gleichungen.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt II.2. Die Analogie (und die Unterschiede) zum gewöhnlichen Newton-Verfahren (siehe zum Beispiel Forster, Analysis I) sollen erklärt werden.

5. **Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Q}_p$.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt II.3. Der Begriff der kurzen exakten Sequenz abelscher Gruppen muss definiert werden.

6. **Das Hilbert-Symbol. Lokale Eigenschaften.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt III.1. Die Bemerkungen zur Klassenkörpertheorie und die Bemerkungen am Schluss können ausgelassen werden. Der Fall $p = 2$ (Seite 22) kann gegebenenfalls verkürzt behandelt werden.

7. **Das Hilbert-Symbol. Globale Eigenschaften.** *Inhalt des Vortrags:* Abschnitt III.2. Den Satz von Dirichlet (Lemma 3) benutzen wir ohne Beweis.

8. **Quadratische Formen, I.** *Inhalt des Vortrags:* IV.1.1 bis 1.6 Cor. 2. Der Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und symmetrischen Bilinearformen soll kurz erklärt werden; ansonsten soll an Ergebnisse, die aus der linearen Algebra bekannt sind, höchstens erinnert werden.

9. **Quadratische Formen, II.** *Inhalt des Vortrags:* IV.1.6 Thm. $1'$ – 2.2 Lemma

10. **Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$ und über $\mathbb{R}$.** *Inhalt des Vortrags:* IV.2.2 – 2.4. Die Bemerkungen in 2.2 über die Vermutung von Artin und in 2.3 über die reduzierte Norm können ausgelassen werden.

11. **Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$: Der Satz von Hasse-Minkowski.** *Inhalt des Vortrags:* IV.3.1–3.2

12. **Klassifizierung quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$. Summen von drei Quadraten.** *Inhalt des Vortrags:* IV.3.3 + Appendix.

Literatur

[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer.

[MSP] S. Müller-Stach, J. Piontkowski, *Elementare und algebraische Zahlentheorie: Ein moderner Zugang zu klassischen Themen*, Vieweg.
siehe `http://www.uni-due.de/~mat903/buecher.html`

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer.

[S] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer Graduate Texts in Math. **7** (oder das französische Original *Cours d'arithmétique*).