PRO-/SEMINAR ÜBER DARSTELLUNGSTHEORIE ENDLICHER GRUPPEN

PROF. DR. U. GÖRTZ, DR. U. TERSTIEGE, WS 2011/12

Die Darstellungstheorie ist eine Theorie, die praktisch überall dort von Bedeutung ist, wo endliche Gruppen eine Rolle spielen, also in sehr vielen Gebieten der Mathematik, aber auch in anderen Naturwissenschaften.

Sei G eine endliche Gruppe. Eine Darstellung von G auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G \to GL(V)$, d.h. ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Vektorraumautomorphismen von V. Ist ρ injektiv, so identifiziert ρ also die Gruppe G mit einer endlichen Untergruppe von $GL(V)$. Nach Wahl einer Basis von V können wir dann G als eine endliche Gruppe von Matrizen in $GL_n(\mathbb{C})$ auffassen — G wird also ganz konkret als eine Gruppe von Matrizen *dargestellt*.

Eine typische Quelle von Darstellungen besteht darin, eine Gruppe G als die Symmetriegruppe einer Teilmenge von V zu realisieren. Andersherum gesagt: die Darstellungstheorie (und allgemeiner die Theorie von endlichen (und anderen) Gruppen) ist der mathematische Zugang zum Begriff der Symmetrie.

Eine wesentliche Frage im Seminar ist die, wie man eine Darstellung als "direkte Summe" von kleineren Darstellungen zerlegen kann, was also gewissermaßen die "Atome" in der Darstellungstheorie sind. Alle Konzepte sollen anhand von Beispielen erläutert werden; mehrere Vorträge sind für die Behandlung von verschiedenen Beispielen vorgesehen.

Anforderungen/Vorkenntnisse: Gute Kenntnisse in Linearer Algebra. Die Motivation, sich ein mathematisches Thema anzueignen.

Organisatorisches: Der Vortrag soll an der Tafel gehalten werden und nicht länger als 80 Minuten dauern. Danach soll sich in einer kurzen Feedback-Runde jeder der Zuhörer kurz zu Stärken und Schwächen des Vortrags äußern.

Für das Proseminar gilt Anwesenheitspflicht; es wird eine aktive Teilnahme erwartet. Für den Fall, dass Sie an einem Termin aus wichtigen Gründen verhindert sind, entschuldigen Sie sich bitte vorher bei einem der Veranstalter und bei der/dem Vortragenden. An Teilnehmer, die Termine unentschuldigt vesäumen oder insgesamt mehr als zwei Termine versäumen, kann kein Proseminarschein ausgegeben werden.

Für die mit $*$ gekennzeichneten Vorträge kann wahlweise ein Proseminarschein oder ein Seminarschein vergeben werden. Je nachdem, ob mehr Interesse an Proseminar- oder Seminarvorträgen besteht, werden wir einige der Vorträge auslassen.

Termin: Do, 8-10, T03 R04 D10, Beginn: 13.10.

Programm

1. **Gruppen.** Wir beginnen mit den grundlegenden Begriffen der Gruppentheorie, die für alles Folgende unabdingbar sind (und kommentarlos benutzt werden können/sollen).

Inhalt des Vortrags: Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Gruppe, Untergruppe, Homomorphismus, Stabilisator. Bahnengleichung. Permutationsgruppen. Beispiele. [Art], 5.5, 5.6, 5.7.

Normalteiler, Quotient nach einem Normalteiler, Homomorphiesatz.

Ergänzende Literatur: [Bo] 1.1, 1.2, 5.1; [Arm].

2. **Die platonischen Körper.** Die platonischen Körper waren, wie der Name andeutet, schon in der Antike bekannt und werden beispielsweise in den *Elementen* von Euklid besprochen. Wir zeigen mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel, dass es (höchstens) 5 solche reguläre Polyeder gibt.

Inhalt des Vortrags: Definition und Klassifikation der 3-dimensionalen regulären Polyeder ("platonische Körper"), [Au], IV.3, IV.4, IV.5. Der Hauptpunkt soll der Beweis sein, dass es keine anderen platonischen Körper als die "bekannten" geben kann; der Existenzbeweise kann kurz abgehandelt werden. Die Eulersche Polyederformel soll bewiesen werden; eventuell kann nach Absprache auch ein andere Beweis als der in [Au] präsentiert werden.

Ergänzende Literatur: [Co] Ch. 10.

3. **Die orthogonale Gruppe $O(\mathbb{R}^3)$ und ihre endlichen Untergruppen.** *Inhalt des Vortrags:* [GB] Ch. 2, 2.1–2.5. (Die Abschnitte 2.1 und 2.3 sind aus der Vorlesung bekannt und sollten dementsprechend nur knapp wiederholt werden.) Der Fall der $O(\mathbb{R}^2)$ sollte "zum Aufwärmen" kurz besprochen werden.

Ergänzende Literatur: Zu den Symmetriegruppen der platonischen Körper: [Arm] Ch. 8.

4. **Darstellungen.** Mit diesem Vortrag beginnt der Hauptteil des Seminars. Wir definieren den Begriff der Darstellung und der Unterdarstellung, und betrachten einige einfache Beispiele.

Inhalt des Vortrags: [Se] 1.1–1.3.

5. **Irreduzible Darstellungen, Tensorprodukte, Symmetrisches und alternierendes Quadrat.** *Inhalt des Vortrags:* [Se] 1.4–1.6 Gib ein Beispiel, in dem das Tensorprodukt zweier irreduzibler Darstellungen nicht irreduzibel ist.

6. **Charaktere.** Die Verkettung einer Darstellung $G \to GL(V)$ mit der Spurfunktion liefert den sogenannten "Charakter" der Darstellung, der — wie wir später sehen — tatsächlich die Darstellung *charakterisiert.* In diesem Vortrag werden nach der Definition einige Eigenschaften des Charakters bewiesen, und dann das Schursche Lemma behandelt.

Inhalt des Vortrags: [Se] 2.1, 2.2

7. **Orthogonalität von Charakteren.** Ein wesentliches Hilfsmittel in der Charaktertheorie ist die Definition eines Skalarprodukts (auf der Menge aller Abbildungen von G nach $\mathbb{C}$), so dass die Charaktere zu verschiedenen irreduziblen Darstellungen senkrecht aufeinander stehen.

Inhalt des Vortrags: [Se] 2.3, 2.4, 2.5 (bis Thm. 6)

8. **Anzahl irreduzibler Darstellungen, Zerlegungen.** In diesem Vortrag wird eine Formel über die Anzahl der unzerlegbaren Darstellungen einer endlichen Gruppe G bewiesen: Diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in G. Außerdem betrachten wir gewisse Zerlegungen eine Darstellung in Summen von irreduziblen Darstellungen.
Inhalt des Vortrags: [Se], 2.5 (ab Thm. 7), 2.6, 2.7

9. $*$ **Untergruppen, Produkte, induzierte Darstellung.** Wir untersuchen, wie sich Darstellungen bezüglich Untergruppen und Produkten verhalten, und führen den Begriff der induzierten Darstellung ein: gegeben eine Gruppe G, eine Untergruppe H und eine Darstellung V von H, so ist die induzierte Darstellung $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ eine Darstellung von G.
Inhalt des Vortrags: [Se] 3.1–3.3

10. $*$ **Beispiele I.** Wir üben den Begriff der induzierten Darstellung noch etwas besser ein, und betrachten dann einige Beispiele, zum Beispiel zyklische Gruppen und Diedergruppen.
Inhalt des Vortrags: [Se] Übungsaufgaben 3.4, 3.5 (S. 31 der englischsprachigen Ausgabe), 5.1, 5.3, 5.4

11. $*$ **Beispiele II.** Weitere Beispiele: Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4$, die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_4$, die Symmetriegruppe des Würfels.
Inhalt des Vortrags: [Se] 5.7–5.9

12. $*$ **Die Gruppenalgebra.** Eine Darstellung V einer Gruppe G kann man auch als "Modul" über einem Ring verstehen, der sogenannten Gruppenalgebra. Diese Algebra soll hier eingeführt werden, danach werden einige einfache Eigenschaften bewiesen. Das Konzept der Gruppenalgebra stellt eine wichtige Verbindung zwischen der Darstellungstheorie und der Theorie von Ringen und ihrer Moduln her.
Inhalt des Vortrags: [Se], 6.1 (nur die Definition der Gruppenalgebra), 6.2–6.5

13. $*$ **Darstellungen der symmetrischen Gruppe I.** In diesem und dem nächsten Vortrag betrachten wir Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$. Die Konjugationsklassen der $\mathfrak{S}_n$ sind durch den Type der Zykelzerlegung gegeben, so dass man eine explizite Parametrisierung der Menge der irreduziblen Darstellungen erhält.
Inhalt des Vortrags: [FH], 4.1, 4.2

14. $*$ **Darstellungen der symmetrischen Gruppe II.** *Inhalt des Vortrags:* [FH], 4.3

15. $*$ **Das Mackey-Kriterium.** Das Mackey-Kriterium beschreibt, wann eine induzierte Darstellung irreduzibel ist.
Inhalt des Vortrags: [Se] 7.1–7.4

16. $*$ **Beispiele für induzierte Darstellungen.** Zum Abschluss betrachten wir einige Beispiele für induzierte Darstellungen und beweisen die Sylowschen Sätze.
Inhalt des Vortrags: [Se] 8.1–8.5

Literatur

[Arm] M. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer UTM 1988.
[Art] M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser 1993.
[Au] M. Audin, *Geometry*, Springer Universitext 2002.
[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer.
[Co] H. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley 1969.
[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Springer Graduate Texts in Mathematics.
[GB] L. Grove, C. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd ed., Springer GTM **99**, 1985
[Se] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer Graduate Texts in Mathematics (auch in Französisch: *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann).

Anmerkungen.

In Vortrag 1 sollte auch der Begriff der Gruppenwirkung behandelt werden. Das Buch [Se] ist oftmals sehr knapp, je nachdem, wie gut/weit die Teilnehmer*innen sind, sollte man noch andere Quellen heranziehen. (Das Buch *Representation Theory of Finite Groups*, Springer, von Benjamin Steinberg ist eine Möglichkeit; dort ist die Darstellung allerdings fast schon wieder zu ausführlich.) Insbesondere die etwas indirekte Einführung der induzierten Darstellung einer Darstellung ist in [Se] schwer verdaulich. Weitere Quellen, auch für Anwendungen: James, Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, CUP; Burns, *Introduction to group theory with applications*, Acad. Press.