Prof. Dr. Ulrich Görtz
Dr. Martin Kreidl

Sommersemester 2011

Proseminar zur Projektiven Geometrie

Einleitung: Es gibt drei Fragen, vor denen man, ist man erst einmal als Mathematiker identifiziert, auf keinem Campus, bei keiner Studentenfete, in keiner Kneipe mehr sicher ist: (1) "Was kann man denn *damit* einmal machen?" Dazu kennen Sie wahrscheinlich reichlich Antworten. (2) "In der Mathematik ist doch schon alles entdeckt - was soll man denn da noch herausfinden?" Eine ganz gemeine Frage - versuchen Sie einmal jemandem zu erklären, welche Musikrichtung bisher noch *nicht* erfunden wurde...! und **(3) "Wie ist das denn wirklich: Schneiden sich nun zwei parallele Geraden im Unendlichen, oder nicht?!"** (ja, Leute fragen das wirklich!). Man kann diese Frage natürlich nicht einfach mit Ja oder Nein beantworten - wo soll denn überhaupt das Unendliche sein?!

Neben vielen anderen Dingen werden wir in diesem Proseminar sehen, wie man dem Begriff des Unendlichen in der Geometrie tatsächlich einen Sinn geben kann. Für einen kleinen Hinweis, wie das funktioniert, stellen wir uns eine unbegrenzt ausgedehnte Ebene vor, auf der zwei parallele Geraden liegen. Ändern wir unseren Blickwinkel, d.h. blicken wir nicht mehr senkrecht auf diese Ebene, sondern denken wir uns *auf* dieser Ebene stehend, und blicken wir parallel zu den beiden Geraden in die Ferne, so erscheinen diese plötzlich nicht mehr parallel, sondern aufeinander zulaufend. Sie schneiden sich scheinbar (oder wirklich?!) auf einer "unendlich weit entfernten Geraden", der Horizontlinie! Wenn wir die Horizontlinie formal zu der Ebene hinzufügen, erhalten wir im wesentlichen das, was in der Mathematik die *projektive Ebene* heißt. In einer solchen Ebene schneiden sich also tasächlich zwei parallele Geraden im Unendlichen! Die höherdimensionalen Analoga davon heißen projektive Räume, die zentralen Objekte in der projektiven Geometrie.

Es zeigt sich dass das Hinzufügen von unendlich fernen Objekten die Geometrie *einfacher* und in vielerlei Hinsicht übersichtlicher macht. Viele klassische Sätze der ebenen Geometrie (Sätze von Pappus, Desargues, Pascal,...) lassen sich im Rahmen der projektiven Geometrie wesentlich besser verstehen und einfacher beweisen, weil Fallunterscheidungen wie "zwei nicht-parallele Geraden haben einen Schnittpunkt - zwei parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt" nicht mehr nötig sind.

Historisch gesehen hat die projektive Geometrie zumindest zum Teil ihren Ursprung in der Malerei der Renaissance, wo sich Künstler erstmals konsequent an perspektivischen Darstellungen versuchten - im Gegensatz zur "2-dimensionalen" Malerei des Mittelalters. Tatsächlich sind die Begriffe der *Perspektivität* (oder Zentralprojektion) und der Projektivität wesentliche Begriffe in der projektiven Geometrie.

Ziel des Proseminars: Das Ziel dieses Proseminars ist es, die Grundlagen der projektiven Geometrie zu verstehen und einige schöne Anwendungen wie den Satz von Pappus (Antike), und die Sätze von Desargues, Pascal und Brianchon (Neuzeit) kennenzulernen. Weiter wollen wir die Kegelschnitte (Ellipse, Hyperbel und Parabel - ebenfalls schon Studienobjekte der antiken Mathematik) und ihre höherdimensionalen Analoga, die sog. Quadriken, vom projektiven Standpunkt aus verstehen und klassifizieren.

Zielgruppe: Bachelor- und Lehramtsstudenten ab dem 2. Semester.

Literatur: Unsere wichtigste Referenz ist Gerd Fischers "Analytische Geometrie" [1]. Hierin finden wir fast alles, was im Proseminar behandelt werden soll, in ausführlicher und leicht verdaulicher Form. Gelegentlich ergänzen wir dies durch das etwas ältere Buch von Herrmann Schaal [2] "Lineare Algebra und Analytische Geometrie", Band 2. Der Textsatz ist hier zwar nicht ganz so ansprechend wie bei Fischer, trotzdem lohnt sich ein vergleichender Blick auch für Vorträge, die nicht explizit darauf verweisen! Auch wenn wir darauf im Programm nicht ausdrücklich eingehen, möchte ich jedem, der Lust dazu hat, zumindest einen Blick in den Klassiker von Marcel Berger "Geometry" [3] (engliche Übersetzung des französischen Originals), empfehlen. Hier werden noch viele andere Aspekte der projektiven Geometrie (z.B. vom Standpunkt der algebraischen Geometrie und Topologie) behandelt, die in der modernen Mathematik von großer Bedeutung sind und unser Seminarprogramm abrunden.

1 Grundlagen der affinen Geometrie

1. Affine Geometrie I. Erklären (bzw. wiederholen) Sie die Grundbegriffe der affinen Geometrie: Affine (Unter-)Räume, affine Abbildungen, Durchschnitt und Verbindung von affinen Unterräumen. Beweisen sie die *Dimensionsformel* und diskutieren Sie weiter den Begriff der *Parallelität* von Unterräumen sowie die *Parallelprojektion.*

Literatur: [1], Abschnitt 1.1, pp. 1-21.

2. Affine Geometrie II. Erklären Sie, was *affine Unabhängigkeit* einer Familie von Punkten bedeutet und was *affine Koordinaten* sind. Erklären Sie, wie sich affine Abbildungen, nach Wahl von affinen Koordinaten, mithilfe von Matrizen beschreiben lassen. Definieren Sie das *Teilverhältnis* dreier Punkte auf einer Geraden. Beweisen Sie die Invarianz des Teilverhältnisses unter Affinitäten und wenden Sie diese Invarianz an um drei einfache Sätze aus der Elementargeometrie zu beweisen.

Literatur: [1], Abschnitt 1.2, pp. 21-31.

2 Projektive Geometrie

3. Projektive Räume und Unterräume. Sei V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper K. Definieren Sie die Begriffe 'projektiver Raum' und 'projektiver Unterraum' . Erklären Sie den Begriff der homogenen Koordinaten und die Einbettung des affinen Raumes K^n in den projektiven Raum $\mathbb{P}(K^{n+1})$ (den sog. projektiven Abschluss von K^n). Definieren Sie Durchschnitt und Verbindung von projektiven Unterräumen und beweisen Sie die Dimensionsformel.

Literatur: [1] Abschnitt 3.1, pp. 131-135.

4. Projektive Abbildungen und projektive Koordinaten. Definieren Sie die Begriffe 'projektive Abbildung' und 'Projektivität'. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Affinitäten und Projektivitäten. Wann heißt eine Familie von Punkten in $\mathbb{P}(V)$ projektiv unabhängig und was ist eine projektive Basis?

Literatur: [1] Abschnitte 3.2.1 - 3.2.6, pp. 135-143.

5. Gebrochen lineare Transformationen und Zentralprojektion. Erklären Sie, wie sich Projektivitäten (nach Wahl eines Koordinatensystems) durch gebrochen lineare Transformationen darstellen lassen. Definieren Sie die Begriffe 'Zentralprojektion' und 'Perspektivität' und zeigen Sie, dass jede Zentralprojektion eine Projektivität ist. Interpretieren Sie die Parallelprojektion aus der affinen Geometrie als eine spezielle Zentralprojektion im Rahmen der projektiven Geometrie.

Literatur: [1] Abschnitte 3.2.7 - 3.2.9, pp. 143-149.

6. Das Doppelverhältnis. Definieren Sie das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten in $\mathbb{P}(V)$ und erklären Sie, wie diese Zahl nach Wahl von Koordinaten berechnet werden kann. Zeigen Sie: Das Doppelverhältnis ist invariant unter Projektivitäten, und die Definition des Doppelverhältnisses ist daher unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Erklären Sie weiters, wie Doppelverhältnis und (affines) Teilverhältnis zusammenhängen.

Literatur: [1] Abschnitte 3.3.1 - 3.3.4, pp. 149-154.

7. Harmonische Punkte und Geometrie in der projektiven Ebene. Erklären Sie, wann zwei Punktepaare auf einer projektiven Geraden *harmonisch* liegen. Beweisen Sie anschließend den Satz vom *vollständigen Vierseit* und die Sätze von Desargues und Pappus. Erklären Sie die damit verbunden Konstruktionsaufgaben 'mit Lineal' in der Ebene.

Literatur: [1] Abschnitte 3.3.5 - 3.3.7, pp. 154 - 157. Zur weiteren Illustration siehe auch [2] §23, pp. 217 - 227 (Achtung: in diesem Buch ist der 'Satz von Pappus' ein anderer Satz, der in diesem Vortrag nich behandelt werden soll! Unser 'Satz von Pappus' heißt hier 'Satz von Pappus-Pascal'!)

8. Dualität. Erklären Sie den Begriff der *Korrelation.* Wiederholen Sie dann kurz den Begriff des Dualraums und definieren Sie den *dualen projektiven Raum* $\mathbb{P}(V^*)$. Erklären Sie, wie man aus einer Semi-Projektivität von $\mathbb{P}(V)$ nach $\mathbb{P}(V^*)$ eine Korrelation auf $\mathbb{P}(V)$ erhlält und zeigen Sie, dass man auf diese Weise sogar jede Korrelation auf $\mathbb{P}(V)$ erhält (Hauptsatz über Korrelationen).

Literatur: [1] Abschnitte 3.4.1 - 3.4.6, pp. 166 - 172.

9. Das Dualitätsprinzip. Erklären Sie das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie. Erkären bzw. beweisen Sie anschließend die Dualisierungen der Sätze vom vollständigen Vierseit (Satz vom vollständigen Viereck) und von Desargues und Pappus (Satz von Brianchon). Definieren Sie das Doppelverhältnis von Hyperebenen in $\mathbb{P}(V)$ und zeigen Sie, wie es sich als Doppelverhältnis von Punkten darstellen lässt.

Literatur: [1] Abschnitte 3.4.7 - 3.4.8, pp. 172 - 157; [2] §23, pp. 220-222.

3 Projektive Quadriken

10. Projektive Quadriken. Diskutieren Sie die Begriffe *homogenes Polynom* und *Nullstellenmenge* und definieren Sie den Begriff der *projektiven Quadrik.* Diskutieren Sie den Spezialfall der projektiven Ebene und zeigen Sie, wie unterschiedliche Einbettungen der affinen Ebene Anlass zu den verschiedenen Typen von *Kegelschnitten* (Ellipse, Parabel, Hyperbel) geben. Zeigen Sie weiter, dass Quadriken unter Projektivitäten wieder auf Quadriken abgebildet werden.

Literatur: [1] Abschnitte 3.5.1 - 3.5.4, pp. 176 - 183; r

11. Projektive Hauptachsentransformation. Erklären Sie den Begriff der *geometrischen Äquivalenz* von Quadriken. Zeigen Sie im Folgenden, dass jede projektive Quadrik in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ geometrisch äquivalent ist zu einer Quadrik, die durch eine Gleichung der Form

$$X_0^2 + \cdots + X_i^2 - X_{i+1}^2 - \cdots - X_n^2 = 0$$

gegeben ist. Diskutieren Sie Beispiele!

Literatur: [1] Abschnitte 3.5.5 - 3.5.8, pp. 183 - 192;

12. Klassifikation der projektiven Quadriken. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen von Quadriken in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ (bzgl. geometrischer Äquivalenz) durch die Zahlen in $\{0, \ldots, n+1\}$ (den *Rang*) beschrieben werden. Im Fall des reellen projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ wird die Äquivalenzklasse einer Quadrik durch zwei Zahlen (den *Rang* und die *Signatur*) festgelegt. Erstellen Sie eine vollständige Liste der Äquivalenzklassen von Quadriken in der reellen projektiven Ebene und im 3-dimensionalen reellen projektiven Raum. Illustrieren Sie diese durch Bilder.

Literatur: [1] Abschnitte 3.5.9 - 3.5.11, pp. 192 - 199;

13. Die Sätze von Pascal und Brianchon. Formulieren und beweisen Sie den *Satz von Pascal* über Quadriken in der Ebene. Erklären Sie, warum der Satz von Pappus als Spezialfall des Satzes von Pascal aufgefasst werden kann (Fall einer ausgearteten Quadrik). Formulieren (und beweisen) Sie den zum Satz von Pascal dualen Satz, den *Satz von Brianchon.*

Literatur: [1] Abschnitt 3.5.12, pp. 199 - 204, [2] §24, pp. 256 - 262.

Literatur

[1] Gerd Fischer, *Analytische Geometrie*, Vieweg Studium; Grundkurs Mathematik **35** (1985), 4. Auflage.

[2] Hermann Schaal, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Band II*, Vieweg (1980), 2. Auflage.

[3] Marcel Berger, *Geometry*, Springer; Universitext.