LINEARE ALGEBRA I, WS 2010/11. NOTIZEN ZUR VORLESUNG.

ULRICH GÖRTZ

1. Einführung, Motivation

Dies ist kein vollständiges Vorlesungsskript, sondern ein grober Überblick über die Inhalte der Vorlesung, größtenteils in Stichpunkten (die es aber hoffentlich erlauben, alles weitere in anderen Skripten oder in Lehrbüchern zu recherchieren).

1.1. **Lineare Gleichungssysteme.** LGS mit 1 Gleichung, 1 Unbestimmten; 1 Gleichung, n Unbestimmten; 2 Gleichungen, 2 Unbestimmten. (Ungefähr wie in [Lo-LA1])

1.2. **Weitere Themen.** Analytische Geometrie. Symmetrie.

2. Grundlagen

Referenz: [Bo-LA] 1.1.

2.1. **Notation.** $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$. $\vee$, $\wedge$, $\neg$.
Quantoren, Reihenfolge von Quantoren.
Summennotation.

2.2. **Mengen.** Sprache der Mathematik: große Präzision, feststehende Ausdrücke, differiert teilweise von Umgangssprache, “Logik”.

Eine *Menge* ist gegeben durch ihre Elemente: Ist M eine Menge, so heißt $x \in M$, dass x Element der Menge ist, und $x \notin M$, dass x nicht Element von M ist. Wir sagen hier bewusst nicht, was eine Menge *ist*; man kann die Mengenlehre axiomatisch aufbauen, das würde aber hier zu weit führen. Es ist aber für uns auch weniger wichtig, was eine Menge ist, entscheidend ist, dass eine Menge *durch ihre Elemente gegeben ist* in dem Sinne, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente haben.

Beispiel 2.1.
- Leere Menge: $\emptyset$.
- Natürliche Zahlen: 0,1,2,3,…; $\mathbb{N}$
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
- Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Mengen. $\in$. Notation für Mengen: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,\dots\}$, $\{x \in M;\ P(x)\}$, $P(x)$ eine Eigenschaft, die Elemente aus M haben oder nicht haben. Beachte: $\{1,2\} = \{1,2,2\}$. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ etc.

Definition 2.2. Sei X eine Menge. Eine Familie (oder: ein System) von Elementen aus X (mit Indexmenge I) ist gegeben durch eine Menge I und für jedes Element $i \in I$ ein Element $x_i \in X$. Formal kann man eine solche Familie als Abbildung $I \to X$, $i \mapsto x_i$, betrachten bzw. definieren.

2.3. **Vollständige Induktion.** Prinzip des kleinsten Elements: Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Prinzip der vollständigen Induktion:
(1) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften (i) $0 \in M$ und (ii) für alle n mit $n \in M$ gilt $n+1 \in M$, stimmt mit $\mathbb{N}$ überein.
(2) Sei $P(n)$ eine Eigenschaft, die die natürliche Zahl n haben oder nicht haben kann (oder: sei $P(n)$ eine Aussage über alle natürlichen Zahlen n) mit den folgenden beiden Eigenschaften: (i) $P(0)$ ist wahr; (ii) für jedes n mit $P(n)$ wahr ist auch $P(n+1)$ wahr. Dann ist $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Äquivalenz der beiden Prinzipien.
Summennotation.

2.4. **Teilmengen, Konstruktionen von Mengen.**

Definition 2.3. *Teilmenge*, $\subseteq$, $\subset$, $\subsetneq$.

Konstruktionen: Differenz $\setminus$, Durchschnitt $\cap$, Vereinigung $\cup$ von Teilmengen einer Menge M, Komplement einer Teilmenge. Kartesisches Produkt von Mengen.

2.5. **Abbildungen.**

Definition 2.4. Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung* f *von* X *nach* Y, $f\colon X \to Y$, ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt $x \mapsto f(x)$.

Formal: Die *Zuordnung* ist gegeben als Teilmenge $F \subset X \times Y$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$. Dieses Element y wird dann als $f(x)$ bezeichnet.

Abbildungen zwischen zwei Mengen. Definitionsbereich/Quelle, Bildbereich/Ziel.
Identische Abbildung.
Bild, Urbild.
Verkettung
Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen.
Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung.
Einschränkung einer Abbildung auf Teilmenge des Definitionsbereichs.

3. Matrizen

3.1. **Körper.**

Definition 3.1. Ein *Körper* ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und Verknüpfungen $+$, $\cdot$, so dass gilt:

(1) Die Verknüpfung $+$ ist assoziativ, kommutativ, hat ein eindeutig bestimmtes neutrales Element 0 und es existieren eindeutig bestimmte inverse Elemente.
(2) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, kommutativ, hat ein eindeutig bestimmtes neutrales Element 1, das von 0 verschieden ist, und für alle $x \in (K \setminus \{0\}$ existiert ein inverses Element.
(3) Distributivgesetz: $(a+b)c = ac + bc$

Beispiele: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Notation: Üblicherweise sagt man, K sei ein Körper und erwähnt $+$, $\cdot$ nicht. Inverse: $-x$, x^{-1}; $x - y := x + (-y)$, $\frac{x}{y} := xy^{-1}$. $K^\times = K \setminus \{0\}$, "multiplikative Gruppe". Elemente von K werden oft als *Skalare* bezeichnet.

Rechenregeln. Kürzungsregeln.

Beispiele: $\mathbb{F}_2$.

3.2. **Lineare Gleichungssysteme.** K Körper

Definition 3.2. Sei K ein Körper, seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen. Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* von m Gleichungen in n Unbestimmten $X_1, \dots, X_n$ über K ist gegeben durch Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 \cdots + a_{mn}X_n &= b_m \end{aligned}$$

mit $a_{i,j} \in K$ für alle $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $b_i \in K$, $i = 1, \dots, m$.

Ein LGS heißt *homogenes* LGS, falls $b_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Wir schreiben kurz, dass das obige LGS gegeben sei durch (a_{ij}, b_i).

Ein LGS, bei dem nicht vorausgesetzt wird, dass es homogen ist, wird auch als *inhomogenes LGS* bezeichnet. Sei ein LGS M gegeben durch (a_{ij}, b_i). Das LGS M_0, das gegeben ist durch $(a_{ij}, 0)$, d.h. die Koeffizienten a_{ij} werden beibehalten, aber alle b_i werden durch 0 ersetzt, heißt das zu M gehörige homogene LGS.

Definition 3.3. Sei ein LGS der obigen Form über dem Körper K gegeben. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des LGS ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, so dass für alle $i = 1, \dots, m$ gilt:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \cdots + a_{1n}x_i = b_i.$$

Beispiel.

Addition, Skalarmultiplikation.

Definition 3.4 (Matrix)**.** $M_{m\times n}(K)$. Achtung: erlaube $m, n = 0$.

Koeffizienten eines LGS als Matrix. Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeffizientenmatrix.

3.3. **Der Gauß-Algorithmus.** Ziel: Bringe LGS durch Äquivalenzumformungen auf ein LGS möglichst einfacher Gestalt mit derselben Lösungsmenge.

Elementare Zeilenumformungen vom Typ

(I) Addition eines Vielfachen (mit $a \in K$) einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

(II) Vertauschung zweier Gleichungen.

(III) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\in K^\times$.

Analog: Elementare Zeilenumformungen vom Typ (I), (II), (III) von Matrizen. (Entsprechend kann man auch von elementaren Spaltenumformungen von Matrizen sprechen.)

Zwei LGS, die durch elementare Zeilenumformungen auseinander hervorgehen, haben dieselbe Lösungsmenge.

Theorem 3.5. *Seien K ein Körper und $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen. Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ kann durch wiederholte Anwendung elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix in Zeilenstufenform überführt werden.*

Beweis. Induktion nach Anzahl der Zeilen. □

Struktur der Lösungsmenge eines homogenen LGS, eines inhomogenen LGS.
Teilräume von K^n, Basis eines Teilraums.
Basis für die Lösungsmenge eines homogenen LGS in Zeilenstufenform.

3.4. **Matrizen.**

Definition 3.6. Matrix. $M_{m\times n}(K)$ Raum der $(m \times n)$-Matrizen über K.

Definition 3.7. Summe von Matrizen. (assoziativ, kommutativ, neutrales Element: Nullmatrix, inverse Elemente). Skalarmultiplikation (assoziativ, distributiv mit $+$).

Definition 3.8. Produkt von Matrizen.

Eigenschaften des Produkts: Assoz., distributiv, nicht komm., i.a. keine Inversen.

Matrizen und LGS: Schreibe Elemente von K^n als Spaltenvektoren. Schreibe Lösungsmenge eines LGS als $\{x \in K^n;\ Ax = b\}$.

3.5. **Bild und Kern einer Matrix.** Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ als Abbildung $f_A\colon K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$.

Definition 3.9. Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Das *Bild von A*, in Zeichen $\operatorname{Im} A$, ist das Bild der Abbildung $f_A\colon K^n \to K^m$, d.h.

$$\operatorname{Im} A = \{y \in K^m;\ \text{ es existiert } x \in K^n, \text{ so dass } Ax = y\}.$$

Definition 3.10. Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Der *Kern von A*, in Zeichen $\operatorname{Ker} A$, ist das Urbild des Elements $0 \in K^m$ unter der Abbildung f_A, d.h.

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in K^n;\ Ax = 0\}$$

Zusammenhang zu LGS.
Kern, Bild sind Teilräume von K^n, K^m.
Verknüpfung von Abbildungen der Form f_A: $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

4. Vektorräume

4.1. **Vektorräume.**

Definition 4.1. Sei K ein Körper. Ein *(K-)Vektorraum* oder *Vektorraum über K* ist eine Menge V zusammen mit Verknüpfungen $+$, $\cdot\colon K \times V \to V$, so dass gilt:

- A1 Die Verknüpfung $+$ auf V ist *assoziativ*.
- A2 Die Verknüpfung $+$ auf V besitzt ein eindeutig bestimmtes neutrales Element 0.
- A3 Jedes Element von V besitzt ein inverses Element bezüglich $+$.
- A4 Die Verknüpfung $+$ auf V ist kommutativ.
- S1 Für alle $v \in V$ gilt $1 \cdot v = v$.
- S2 Für alle $a, b \in K$, $v \in V$ gilt: $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.
- D1 Für alle $a, b \in K$, $v \in V$ gilt: $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.
- D2 Für alle $a \in K$, $v, w \in V$ gilt: $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$.

Schreibweise: Lasse $\cdot$ üblicherweise aus.

Beispiele: K^n, Teilräume von K^n, $\mathrm{Abb}(M, K)$. [Stetige (diff'bare) Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.] Erweiterungskörper von K.

Lemma 4.2 (Rechenregeln)**.** *Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für alle $a \in K$, $v \in V$ gilt: $a \cdot v = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $v = 0$.*

$-(av) = (-a)v = a(-v)$.

Definition 4.3. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum (oder Teilraum) von V*, wenn U abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist (und den Nullvektor $0 \in V$ enthält und mit diesen Verküpfungen selbst ein K-VR ist).

Beispiele.

Summe, Durchschnitt von UVR. Direkte Summe von UVR, Komplementärraum.

4.2. **Erzeugendensysteme.** Sprechweise: Linearkombination

Definition 4.4. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Familie $B = (b_i)_i$ von Elementen von V heißt Basis von V, falls jedes Element $v \in V$ in eindeutiger Weise als LK von Elementen aus B dargestellt werden kann.

Beispiel: Standardbasis von K^n.

Definition 4.5. Von einer Menge von Vektoren aufgespannter UVR. $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $\langle M \rangle$. (Definiert als Menge aller Linearkombinationen.)

Bemerkung: $\langle M \rangle$ ist UVR von V.

Satz 4.6 (Charakterisierung der linearen Hülle)**.** *K Körper, V ein K-VR, $M \subseteq V$.*

(1) *$\langle M \rangle$ ist der Durchschnitt aller UVR, die M enthalten.*
(2) *$\langle M \rangle$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält. (Erklärung der Sprechweise.)*

Definition 4.7. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge M von V heißt Erzeugendensystem von V, falls $\langle M \rangle = V$, d.h. wenn zu jedem $v \in V$ eine Zahl $N \geq 0$ und Elemente $m_1, \dots, m_N \in M$ und $a_1, \dots, a_N \in K$ existieren, so dass $x = \sum_1^N a_i m_i$.

Definition 4.8. *endlich erzeugt*

Erzeugendensysteme von K^m und LGS.

Beispiel eines nicht endlich erzeugten Vektorraums: Raum aller Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit nur endlich vielen Einträgen $\neq 0$.

4.3. **Lineare Unabhängigkeit.** Sprechweise: triviale Linearkombination

Definition 4.9. V ein K-VR. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *linear unabhängig* (l.u.), falls für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt: Sind $a_i \in K$, $i \in J$ mit

$$\sum_{i\in J} a_i v_i = 0,$$

so gilt für alle $i \in J$: $a_i = 0$.

Eine Familie von Vektoren aus V, die nicht linear unabhängig ist, heißt *linear abhängig* (l.a.).

In ähnlicher Weise definiert man die Begriffe *linear unabhängig* und *linear abhängig* für Teilmengen eines Vektorraums. Beachte, dass in einer Familie von Vektoren derselbe Vektor mehrfach auftreten kann, jedoch nicht in einer Menge. Ist etwa $v \in V$, $v \neq 0$, so ist die Menge $\{v, v, \dots, v\}$ l.u., weil sie gleich der Menge $\{v\}$ ist. Die Familie $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ mit $v_i := v$ ist jedoch für $n > 1$ linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit in K^m und LGS.

Lemma 4.10. *K Kp., V ein K-VR, $v_1, \dots, v_n \in V$, $n \geq 1$. Äquivalent:*

(1) *Die Familie System $v_1, \dots, v_n$ ist l.u.*
(2) *Für alle i: $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n\rangle$.*
(3) *Für alle i: $v_i \notin \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$.*
(4) *Für alle $v \in \langle M\rangle$, existiert eine* eindeutig bestimmte *Darstellung von v als LK von $v_1, \dots, v_n$.*
(5) *Es sind $v_1, \dots, v_{n-1}$ l.u. und $v_n \notin \langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle$.*

Beispiele: $\emptyset$ l.u.; ist $0 \in M$, so ist M l.a.; konkrete Beispiele.

4.4. **Basen, Basissätze.**

Satz 4.11. *Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei B eine Teilmenge von V. Äquivalent:*

(1) *B ist eine Basis von V.*
(2) *B ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.*
(3) *B ist ein minimales Erzeugendensystem von V (d.h. B ist ein Erzeugendensystem von V, aber keine echte Teilmenge $B' \subsetneq B$ ist ein Erzeugendensystem von V).*
(4) *B ist ein maximales linear unabhängiges System in V (d.h. B ist linear unabhängig und für jedes $v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ linear abhängig).*

Satz 4.12 (Basisergänzungssatz)**.** *Seien K ein Körper und V ein K-VR. Sei M eine linear unabhängige Teilmenge von V, und sei $E \subseteq V$ ein [endliches] Erzeugendensystem von V, das M enthält. Dann existiert eine Basis B von V mit $M \subseteq B \subseteq E$.*

Insbesondere: Jede l.u. Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis ergänzen.

Korollar 4.13. *Jeder [endlich erzeugte] K-VR besitzt eine Basis.*

Satz 4.14 (Basisaustauschsatz)**.** *Seien K ein Körper, V ein K-VR, $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis, $w_1, \dots, w_i \in V$ eine linear unabhängige Familie ($i \geq 0$). Dann existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\#I = i$, so dass die n Elemente $w_1, \dots, w_i, v_j, j \notin I$, eine Basis von V bilden.*

Theorem 4.15. *Sei K ein Körper und sei V ein [endlich erzeugter] K-Vektorraum. Je zwei Basen von V besitzen dieselbe Mächtigkeit (d.h. es gibt eine Bijektion zwischen diesen beiden Teilmengen). Diese Zahl wird als Dimension* $\dim V$ *von V bezeichnet (zumindest sofern sie endlich ist).*

Beispiel: $\dim K^n = n$, $\dim M_{m\times n}(K) = mn$. $A \in M_{m\times n}(K)$ Koeffizientenmatrix eines homogenen LGS, so ist die Zahl r, die bei Umformung von A in Zeilenstufenform auftritt, gleich $n - \dim \operatorname{Ker} A$, also eindeutig durch A bestimmt.

Theorem 4.16. *Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler Vektorraum.*

(1) *Jedes linear unabhängige System von n Vektoren in V ist eine Basis.*

(2) *Jedes Erzeugendensystem von V, das aus n Elementen besteht, ist eine Basis von V.*

UVR eines endlich erzeugten VR sind endlich erzeugt. Dimensionsformel für den Durchschnitt/die Summe von zwei UVR.

5. Lineare Abbildungen

5.1. **Lineare Abbildungen.**

Definition 5.1. *Lineare Abbildung/Vektorraumhomomorphismus*
Sei K ein Körper. Seien V, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt lineare Abbildung oder (Vektorraum-)Homomorphismus zwischen V und W, falls gilt:

(1) Für alle $v, w \in V$: $f(v + w) = f(v) + f(w)$.
(2) Für alle $a \in K$, $v \in V$: $f(av) = af(v)$.

Beispiel: id_V. Weitere Beispiele. Rechenregeln.
Isomorphismen (Existenz einer linearen Umkehrabbildung, äquivalent: bijektiv). Isomorphismen erhalten "VR-Eigenschaften".

Satz 5.2. *Sind W, V zwei K-VR, $\dim W = n$, so bestimmt jede Basiswahl von W einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_K(W, V) \cong V^n$, d.h. eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt, und zu jeder "Wahl von Bildern" gibt es genau eine lineare Abbildung.*

Koordinatenabbildung: V Vektorraum mit Basis $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $c_{\mathscr{B}}\colon V \to K^n$ die eind. best. lin. Abb. mit $v_i \mapsto e_i$.

5.2. **Kern und Bild einer linearen Abbildung.**

$f\colon V \to W$ ein K-Vektorraumhomomorphismus.

Definition 5.3. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$.

Lemma 5.4. $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ *sind UVR.*

Satz 5.5. *Die lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Theorem 5.6 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)**.** *Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-VR und sei V endlich-dimensional. Dann gilt:*

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f.$$

Die Zahl $\dim \mathrm{Im}\, f$ heißt auch der *Rang von f*.

Korollar 5.7. *Seien V, W endlich-dimensionale K-VR,* $\dim V = \dim W$, *und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) *f Isomorphismus,*
(2) *f injektiv,*
(3) *f surjektiv.*

6. Lineare Abbildungen und Matrizen

6.1. Zusammenhang lineare Abbildungen und Matrizen.

Satz 6.1. *Seien $m, n \geq 0$. Die Abbildung*

$$M_{m\times n}(K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m), \quad A \mapsto (f_A\colon x \mapsto Ax),$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$f \mapsto M(f) := (a_{ij})_{i,j},$$

wobei

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i.$$

Satz 6.2. *Seien V, W Vektorräume der Dimensionen $n = \dim V$, $m = \dim W$, und seien $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathscr{C} = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V bzw. W. Dann sind die Abbildungen*

$$M_{m\times n}(K) \to \mathrm{Hom}_K(V, W), \quad A \mapsto c_{\mathscr{C}}^{-1} \circ f_A \circ c_{\mathscr{B}}$$

und

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{m\times n}(K), \quad f \mapsto M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f) = M(c_{\mathscr{C}} \circ f \circ c_{\mathscr{B}}^{-1})$$

zueinander inverse Vektorraumhomomorphismen.

Satz 6.3. *Seien $f\colon V \to W$, $g\colon W \to U$ Homomorphismen endlich-dimensionaler VR V, W, U mit Basen $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$. Dann gilt*

$$M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{D}}(f) M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(g) = M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{D}}(g \circ f).$$

Korollar 6.4 (Basiswechsel)**.** *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus endlich-dimensionaler K-VR, seien $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ Basen von V und $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ Basen von W. Dann gilt*

$$M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{C}'}(f) = M^{\mathscr{C}}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{id}_W) M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f) M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V).$$

Schreibweise: $M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}} := M^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)$, "Basiswechselmatrix".
Beispiele: Drehungen in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

6.2. Rang von Matrizen.

Definition 6.5. Rang einer Matrix.

Zeilenrang = Spaltenrang (Folgerung aus Dimensionsformel)

Satz 6.6. *Seien V, W Vektorräume der Dimensionen $n = \dim V$, $m = \dim W$, und seien $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathscr{C} = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V bzw. W. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $A \in M_{m\times n}(K)$ die zugehörige Matrix.*

(1) *f injektiv $\iff$ $\mathrm{Ker}\, A = 0 \iff \mathrm{rg}\, A = n$.*
(2) *f surjektiv $\iff \mathrm{rg}\, A = m$.*
(3) *Ist $m = n$, so sind die obigen Punkte äquivalent, und äquivalent zu: f Isomorphismus $\iff$ es existiert $B \in M_{n\times n}(K)$ mit $AB = BA = E_n$. (Wir nennen die Matrix A dann* invertierbar*.) $\iff$ die Spalten von A bilden eine Basis von K^n.*

7. Gruppen

7.1. Definition.

Definition 7.1. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, so dass gilt:

(1) (Assoziativität). Für alle $g, h, j \in G$ gilt: $(g \cdot h) \cdot j = g \cdot (h \cdot j)$.
(2) (Neutrales Element). Es gibt ein Element $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $e \cdot g = g$, $g \cdot e = g$.
(3) (Inverse Elemente). Für jedes $g \in G$ existiert ein Element $h \in G$ mit $g \cdot h = h \cdot g = e$.

Bemerkung 7.2. (1) e wie in 2. ist eindeutig bestimmt ($e = ee' = e'$), wie in 3. implizit vorausgesetzt wird. [Könnte Definition ändern.]
(2) Zu jedem $g \in G$ ist das inverse Element h eindeutig bestimmt.
(3) "Rechenregeln"

Definition 7.3. *Abelsche/kommutative Gruppe*

Gruppenhomomorphismus, Isomorphismus, Kern, Bild, Untergruppe
Gruppe der Bijektionen einer Menge, symmetrische Gruppe.
GL_n Gruppe aller K-VR-Automorphismen von K^n.
Identifiziere S_n mit Untergruppe der Permutationsmatrizen in GL_n
Symmetriegruppen von geometrischen Objekten (Teilmengen von $\mathbb{R}^n$).

7.2. Die spezielle lineare Gruppe.

Elementarmatrizen $E_ij(a)$, $i \neq j$, $a \in K^\times$: auf der Diagonale überall 1 und bei (i, j) der Eintrag a, alle weiteren Einträge $= 0$. Inverses einer Elementarmatrix: $E_{ij}(a)^{-1} = E_{ij}(-a)$.

Definition 7.4. SL_n ist die von allen Elementarmatrizen erzeugte Untergruppe von GL_n.

Satz 7.5. *Sei $A \in GL_n$. Dann existieren $d, d' \in K$ und $B, C \in SL_n$, so dass*

$$A = B\mathrm{diag}(1, \dots, 1, d), \qquad A = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, d')C.$$

(siehe zum Beispiel [Lo-LA1]).

7.3. Invertieren einer Matrix.

Alle elementaren Zeilenumformungen lassen sich durch Multiplikation mit gewissen invertierbaren Matrizen von links beschreiben.

Satz 7.6. *Ist $A \in M_{n\times n}(K)$ eine Matrix, die sich durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n umformen lässt, so ist A invertierbar, und die inverse Matrix A^{-1} geht aus E_n durch Anwendung derselben Zeilenumformungen hervor.*

7.4. Bruhat-Zerlegung.

$B \subset GL_n(K)$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen.

Beachte: die Menge U aller Matrizen in B, deren Diagonaleinträge sämtlich $= 1$ sind, ist eine Untergruppe.

$W \subset GL_n(K)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen.

Satz 7.7. *Sei $A \in GL_n$. Dann existiert eine Permutationsmatrix $w \in GL_n$, so dass sich A in der Form bwb' mit $b, b' \in B$ schreiben lässt. Ferner gilt: die Matrix w ist durch A eindeutig bestimmt. Außerdem lässt sich bei geeigneter Wahl von b und b' erreichen, dass alle Diagonaleinträge von b gleich 1 sind.*

Bemerkung 7.8. Wir können den Satz umformulieren als $GL_n = \sqcup_w UwB$ (disjunkte Vereinigung), wobei $UwB = \{bwb';\ b \in U, b' \in B\}$.

Beachte: b, b' im Satz sind nicht eindeutig bestimmt.

Beweis. I. Existenz der Zerlegung. Wir führen den sogenannten Gauß-Bruhat-Algorithmus durch und bringen A im ersten Schritt durch geeignete Zeilen- und Spaltenumformungen vom Typ I auf eine Matrix, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag $\neq 0$ hat.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in GL_n(K)$. Sei i_1 maximal mit $a_{i_1,1} \neq 0$. Bringe alle Einträge der ersten Spalte in den Zeilen $i = 1, \dots, i_1 - 1$ durch geeignete Zeilenumformungen vom Typ I auf 0. Danach ist nur noch ein Eintrag in der ersten Spalte vorhanden. Bringe nun alle Einträge der i_1-ten Zeile in den Spalten $2, 3, \dots, n$ durch geeignete Spaltenumformungen vom Typ I auf 0. Danach ist auch in Zeile i_1 nur noch ein einziger Eintrag (nämlich $a_{i_1,1}$) ungleich 0.

Bezeichne die Einträge der neuen Matrix wieder mit a_{ij}.

Sei nun i_2 maximal mit $a_{i_2,2} \neq 0$. Nach dem ersten Schritt ist jedenfalls $i_2 \neq i_1$ (und insbesondere $a_{i_2,1} = 0$). Bringe alle Einträge der zweiten Spalte in den Zeilen $i = 1, \dots, i_2 - 1$ durch geeignete Zeilenumformungen vom Typ I auf 0. Danach ist nur noch ein Eintrag in der zweiten Spalte vorhanden. Bringe nun alle Einträge der i_2-ten Zeile in den Spalten $3, \dots, n$ durch geeignete Spaltenumformungen vom Typ I auf 0. Danach ist auch in Zeile i_2 nur noch ein einziger Eintrag (nämlich $a_{i_2,2}$) ungleich 0.

Fahre entsprechend fort mit den Spalten $3, \dots, n$. Alle diese elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen lassen sich beschreiben durch Multiplikation von A mit Elementarmatrizen $E_{ij}(a)$ von links bzw. rechts, wobei stets $i < j$, d.h. $E_{ij}(a) \in U$. Es gibt also $u, u' \in U$, so dass uAu' in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag $\neq 0$ hat. Sei d die eindeutig bestimmte Diagonalmatrix, so dass $w := uAu'd$ eine Permutationsmatrix ist.

Wir setzen $b := u^{-1} \in U$, $b' = d^{-1}(u')^{-1} \in B$ und haben $A = bwb'$ wie gewünscht.

II. Eindeutigkeit von w. Sei $b_1wb'_1 = b_2vb'_2$, wo $b_i, b'_i \in B$, $v, w \in W$. Sei σ die zu v, und τ die zu w gehörige Permutation. Zu zeigen ist $w = v$. Jedenfalls gilt für $b := b_2^{-1}b_1$, $b' := b'_2(b'_1)^{-1}$:

$$bw = vb'.$$

Vergleiche nun die ersten Spalten dieser Matrizen. Die erste Spalte von bw ist die $\tau(1)$-te Spalte von b. Jedenfalls an der Stelle $\tau(1)$ befindet sich hier ein Eintrag $\neq 0$. Die erste Spalte von vb' ist das b'_{11}-fache der ersten Spalte von v. Höchstens (und sogar genau) an der Stelle $\sigma(1)$ befindet sich hier ein Eintrag $\neq 0$. Es folgt $\tau(1) \in \{\sigma(1)\}$, also $\tau(1) = \sigma(1)$.

Vergleiche nun die zweiten Spalten der Matrizen. Die zweite Spalte von bw ist die $\tau(2)$-te Spalte von b. Jedenfalls an der Stelle $\tau(2)$ befindet sich hier ein Eintrag $\neq 0$. Die zweite Spalte von vb' ist die Summe des b'_{12}-fachen der ersten und des b'_{22}-fachen der zweiten Spalte. Höchstens an den Stellen $\sigma(1)$ und $\sigma(2)$ befinden sich hier Einträge $\neq 0$. Es folgt $\tau(2) \in \{\sigma(1), \sigma(2)\}$. Da τ bijektiv ist und $\tau(1) = \sigma(1)$, folgt $\tau(2) = \sigma(2)$.

Induktiv folgt $\tau = \sigma$, also $w = v$, wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 7.9. Bei der praktischen Durchführung des Algorithmus ist es unter Umständen sinnvoller, die Einträge $a_{i_\nu,\nu}$ direkt durch Multiplikation der entsprechenden Spalte mit $a_{i_\nu,\nu}^{-1}$ auf 1 zu bringen.

Bemerkung 7.10. Sei $B \in GL_n(K)$, sei w die Permutationsmatrix, die zu der Permutation $i \mapsto n+1-i$ gehört, und sei $A = wB$. Sei $A = bwb'$ die Bruhat-Zerlegung von A — mit derselben Permutation w. (Dies ist gewissermaßen der Normalfall.) Wir nehmen außerdem an, dass auf der Diagonalen von b nur 1 stehen. Dann ist wbw eine untere Dreiecksmatrix, auf deren Diagonale nur 1 stehen. In diesem Fall können wir also $B = (wbw)b'$ als Produkt einer unteren Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonale und einer oberen Dreiecksmatrix schreiben. Diese Zerlegung nennt man auch LR-Zerlegung von B; sie ist bei der numerischen Behandlung von linearen Gleichungssystemen von Bedeutung.

8. Determinante

Vergleiche [Bo-LA], Kapitel 4.

Ziel: Finde eine Invariante ($\in K$) für jede $n \times n$-Matrix A über K, die ablesen lässt, ob A invertierbar ist, und "weitere gute Eigenschaften" hat, z.B. multiplikativ, leicht berechenbar.

Beispiel: 2×2-Fall. (Sehen auch: können "Lösungsformel für LGS" erhoffen.)

Geometrische Interpretation als Volumen des von den Spaltenvektoren in der Matrix erzeugten Parallelepipeds.

8.1. **Permutationen.** Definition Transposition.

Definition Signum sgn einer Permutation. Ist $\sigma \in S_n$ und f die Anzahl der Fehlstände von σ, $f = \#\{(i,j);\ i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$, so gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^f$. Transpositionen haben stets Signum -1.

Die Abbildung $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{1,-1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

8.2. **Determinantenfunktionen.** Seien K ein Körper, V ein K-VR, $n \geq 0$.

Vektorraumstruktur auf V^n (durch komponentenweise Addition, Skalarmultiplikation). Identifiziere $(K^n)^n$ mit $M_{n\times n}(K)$ — indem wir eine Matrix in ihre Spalten aufspalten, können wir Matrizen und n-Tupel von Spaltenvektoren identifizieren.

Definition 8.1. Seien V, n wie oben; W ein K-Vektorraum.

(1) Eine Abbildung $\delta\colon V^n \to W$ heißt multilinear, falls für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ und alle $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n \in V$ die Abbildung
$$V \to W, \qquad v \mapsto \delta(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_n)$$
eine lineare Abbildung ist.

(2) Eine multilineare Abbildung $V^n \to W$ heißt alternierend, falls für alle $v_1,\dots,v_n \in V$, so dass $i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$, gilt:
$$\delta(v_1,\dots,v_n) = 0.$$

Die Menge aller alternierenden multilinearen Abbildungen $V^n \to W$ ist ein K-Vektorraum (mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen).

Charakterisierung alternierender Abbildungen.

Definition 8.2. Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $n = \dim V$. Eine *Determinantenfunktion auf* V ist eine alternierende multilineare Abbildung $V^n \to K$.

Eine Determinantenfunktion Δ heißt nicht-trivial, wenn Δ nicht die Nullabbildung ist.

Wir bezeichnen den Vektorraum aller Determinantenfunktionen auf V mit $\mathscr{D}_V$.

Satz 8.3. $\dim \mathscr{D}_V \le 1$.

Satz 8.4. *Die Abbildung* $\det\colon M_{n\times n}(K) \to K$*, die gegeben ist durch*

$$A = (a_{ij})_{i,j} \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

(Leibniz-Formel) ist eine nichttriviale Determinantenfunktion auf K^n *(vermöge der oben angegebenen Identifikation* $(K^n)^n = M_{n\times n}(K)$*. Insbesondere gilt* $\dim \mathscr{D}_V = 1$ *für jeden endlich-dimensionalen* K*-Vektorraum* V*.*

Beispiele. $n = 2$. $n = 3$. Determinante einer oberen Dreiecksmatrix.

Satz 8.5. *Sei* V *ein* n*-dimensionaler* K*-VR, und sei* $\mathscr{B}$ *eine Basis von* V*. Dann ist die Abbildung* $\Delta_{\mathscr{B}}\colon V^n \to K$*,* $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det A$*, wobei* A *die Matrix mit den Spalten* $c_{\mathscr{B}}(v_1), \dots, c_{\mathscr{B}}(v_n)$ *ist, eine nichttriviale Determinantenfunktion auf* V*.*

Ist $\mathscr{C}$ *eine weitere Basis von* V*, so gilt*

$$\Delta_{\mathscr{C}} = \det(M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}})\Delta_{\mathscr{B}}.$$

Eigenschaften der Determinante.

Satz 8.6. *Sei* $A \in M_{n\times n}(K)$*. Die Matrix* A *ist genau dann invertierbar, wenn* $\det(A) \neq 0$.

Satz 8.7. *Seien* $A, B \in M_{n\times n}(K)$*. Dann gilt*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Korollar 8.8. *Die Einschränkung von* $\det$ *auf die* $GL_n(K)$ *ist ein Gruppenhomomorphismus* $GL \to \mathbb{K}^\times$*. Sein Kern ist die Gruppe* $SL_n(K)$*.*

Satz 8.9. *Die Determinante* $\det\colon M_{n\times n}(K) \to K$ *ist multilinear und alternierend in den Zeilen der Matrix.*

Sie verhält sich unter elementaren Zeilenumformungen ebenso wie unter elementaren Spaltenumformungen.

8.3. **Die Determinante eines Endomorphismus.**

Definition 8.10. Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, Δ eine nicht-triviale Determinantenfunktion auf V und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V. Dann ist $\Delta_f : V^n \to K$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \Delta(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Determinantenfunktion und das Element $\alpha \in K$ mit $\Delta_f = \alpha\Delta$ heißt die *Determinante des Endomorphismus* f, in Zeichen: $\det(f)$.

Ist $\mathscr{B}$ eine Basis von V, so gilt $\det(f) = \det(M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f))$. Insbesondere ist $\det(f)$ unabhängig von der Wahl von Δ in der Definition und von $\mathscr{B}$.

Die Eigenschaften der Determinante von Matrizen übertragen sich in naheliegender Weise auf die Determinante von Endomorphismen.

8.4. **Die Cramersche Regel.** Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{n\times n}(K)$. Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wir bezeichnen mit

A_{ij} die Matrix in $M_{n\times n}$, die aus A durch ersetzen der i-ten Zeile durch den "j-ten Standard-Zeilenvektor $e'_j = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$" (1 an der j-ten Stelle) und der j-ten Spalte durch den i-ten Standardbasisvektor e_i entsteht.

A'_{ij} die Matrix in $M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Es gilt dann $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$.

Satz 8.11 (Laplacescher Entwicklungssatz)**.** *Mit den obigen Notationen gilt für alle i die "Entwicklung von* $\det A$ *nach der i-ten Zeile":*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$$

und für alle j die "Entwicklung von $\det A$ *nach der j-ten Spalte":*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$$

Wir definieren die *Komplementärmatrix* A^{ad} *zu* A durch

$$(A^{\mathrm{ad}})_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A'_{ji}.$$

In der Literatur wird A^{ad} manchmal als die *adjungierte* Matrix bezeichnet; daher auch die Notation. Wir vermeiden diese Sprechweise aber, weil der Begriff der adjungierten Abbildung bzw. adjungierten Matrix in der Linearen Algebra 2 bei der Behandlung von Bilinearformen mit einer völlig anderen Bedeutung auftritt.

Satz 8.12 (Cramersche Regel)**.** *Es gilt*

$$AA^{\mathrm{ad}} = A^{\mathrm{ad}}A = \det(A)E_n.$$

Ist A invertierbar, so gilt

$$A^{-1} = \det(A)^{-1}A^{\mathrm{ad}}.$$

Korollar 8.13. *Sei $A \in GL_n(\mathbb{Q})$. Wir nehmen an, dass alle Einträge von A in $\mathbb{Z}$ liegen. Genau dann liegen auch alle Einträge von A^{-1} in $\mathbb{Z}$, wenn* $\det(A) \in \{1, -1\}$.

Lösungsformel für Lineare Gleichungssysteme.

9. Eigenwerte

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-VR, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Definition 9.1. Der Endomorphismus f heißt diagonalisierbar, wenn eine Basis $\mathscr{B}$ von V existiert, so dass $M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Definition 9.2. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ heißt diagonalisierbar, wenn $S \in GL_n(K)$ existiert, so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Es ist also A genau dann diagonalisierbar, wenn $f_A\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$, diagonalisierbar ist.

9.1. **Eigenwerte, Eigenvektoren.**

Definition 9.3. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt *Eigenvektor von f zum Eigenwert* λ, falls $f(v) = \lambda v$. Ein Element $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert der linearen Abbildung f*, falls ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ existiert, der EV von f zum EW λ ist.

Ist λ ein Eigenwert von f, so heißt die Menge

$$V_\lambda = V_\lambda(f) = \{v \in V;\ f(v) = \lambda v\}$$

aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ zusammen mit dem Nullvektor der *Eigenraum* von f zum Eigenwert λ. (Dies ist ein Untervektorraum von V.)

Mit dieser Definition können wir sagen: Ein Endomorphismus ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basis aus Eigenvektoren existiert.

Geometrische Interpretation. Beispiele.

Satz 9.4 (Charakterisierung von Eigenwerten)**.** *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, $n = \dim V$, $\mathscr{B}$ eine Basis von V, $A = M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$. Sei $\lambda \in K$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *λ ist Eigenwert von f.*
(2) *λ ist Eigenwert von A.*
(3) $\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$
(4) $\operatorname{Ker}(A - \lambda E_n) \neq \{0\}$
(5) $\det(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = 0$
(6) $\det(A - \lambda E_n) = 0$

Korollar 9.5. *Die Eigenwerte einer oberen Dreiecksmatrix sind genau die Diagonaleinträge der Matrix.*

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und die Fibonacci-Zahlen.

9.2. **Eigenräume.**

Satz 9.6. *Seien $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $v_1, \dots, v_m$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f. Dann sind $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig.*

Korollar 9.7. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.*

(1) *f hat höchstens $\dim V$ verschiedene Eigenwerte.*
(2) *Hat f genau n verschiedene Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.*

Satz 9.8. *Seien V ein Vektorraum und $U_1, \dots, U_m \subseteq V$ Untervektorräume. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es ist $V = \sum U_i$ und für jedes $v \in V$ ist die Darstellung $V = \sum_{i=1}^m u_i$, $u_i \in U_i$, eindeutig.*
(2) *Es ist $V = \sum U_i$ und für alle i gilt $U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}$.*

In diesem Fall schreiben wir $V = \bigoplus_{i=1}^m U_i$ und sagen, V sei die direkte Summe der U_i.

Mit dieser Sprechweise können wir aus dem obigen Satz die Folgerung ableiten: Sei f ein Endomorphismus von V und sei $V' \subseteq V$ der von den Eigenräumen $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$ von f erzeugte Untervektorraum. Dann gilt $V' = \bigoplus V_{\lambda_i}$. Der Endomorphismus ist genau dann diagonalisierbar, wenn $V' = V$.

Beispiel 9.9. Googles "page rank"-Algorithmus als Eigenwertproblem.

Anhang, Literaturverweise

Literatur

[Bo-LA] S. Bosch, *Lineare Algebra* https://doi.org/10.1007/978-3-642-55260-1
[Fi] G. Fischer, *Lineare Algebra* https://doi.org/10.1007/978-3-658-03945-5
[Lo-LA1] F. Lorenz, *Lineare Algebra 1*
[Lo-LA2] F. Lorenz, *Lineare Algebra 2*