Kommutative Algebra, SS 2022

Ulrich Görtz

Version vom 4. Juli 2022.

Online-Version des Skripts: https://math.ug/algebra2-ss22/

Ulrich Görtz

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
45117 Essen

ulrich.goertz@uni-due.de

Ich freue mich über Kommentare und Berichtigungen.

Ich bedanke mich für Bemerkungen/Korrekturen bei Jan Renner.

Gesetzt in der Schrift Vollkorn[3] von F. Althausen mit LuaLaTeX, TikZ und anderen TeX-Paketen. Die HTML-Version wird mit plasTeX[4] erzeugt.

[1] https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.de
[2] https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de
[3] http://vollkorn-typeface.com/
[4] https://github.com/plastex/plastex

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Die *Kommutative Algebra* behandelt die Theorie der kommutativen Ringe und von Moduln über solchen Ringen. Der Begriff des Moduls über einem Ring ist die natürliche Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraums über einem Körper. Zwei wichtige Beispielklassen kommutativer Ringe sind

Polynomringe über einem (algebraisch abgeschlossenen) Körper und ihre Quotienten nach Idealen. Ist k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper und $I = (f_1, \dots, f_m) \subseteq R = k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, so reflektiert der Ring R/I viele geometrische Eigenschaften der gemeinsamen Nullstellenmenge

$$V(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n; \forall i : f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subseteq k^n$$

der Polynome f_i (siehe Korollar 4.28, Korollar 4.29). Wegen der Möglichkeit, geometrische Eigenschaften in algebraische Eigenschaften eines Rings zu übersetzen, ist die Kommutative Algebra ein essenzielles Hilfsmittel der modernen algebraischen Geometrie.

Ganzheitsringe algebraischer Zahlkörper. Sei $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung, und sei

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K;\ \mathrm{minpol}_{x,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Diese Menge ist ein Unterring von K und der Ring $\mathcal{O}_K$ heißt der *Ring der ganzen Zahlen* von K. Er reflektiert wesentliche zahlentheoretische Eigenschaften des Körpers K. Dies wird in der Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie* genauer untersucht.Zum Beispiel hängt die Fermatsche Vermutung[1] –

$$\text{für } n > 2 \text{ und } x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ gilt } x^n + y^n = z^n \text{ höchstens, wenn } xyz = 0$$

– mit der Struktur der Ganzheitsringe in den Körpern $\mathbb{Q}(\zeta)$, die durch Adjunktion einer primitiven n-ten Einheitswurzel entstehen, zusammen. (Jedenfalls in dem Sinne, dass man für diejenigen n, für die dieser Ring faktoriell ist, die obige Aussage ziemlich leicht beweisen kann. Allerdings kann man zeigen, dass das nur für endlich viele n (die alle ≤ 90 sind) der Fall ist. Inzwischen wurde die Fermatsche Vermutung für alle n von Wiles und anderen bewiesen, mit Methoden der algebraischen Zahlentheorie und algebraischen Geometrie, die über den üblichen Umfang des Master-Studiums deutlich hinausgehen.)

Im Sinne der Übersetzung von algebraischen zu geometrischen Fragen (und umgekehrt), werden wir für jeden Ring R die Menge $\operatorname{Spec} R$ aller Primideale von R zu einem »geometrischen Objekt« machen (einem topologischen Raum), siehe Abschnitt 2.1. In der algebraischen Geometrie wird diese Sichtweise dann noch wesentlich ausgebaut. Die so verfügbare geometrische Intuition kann dann auch auf Situationen angewendet werden, die von zahlentheoretischen Fragen herkommen, etwa von Ringen der Form $\mathcal{O}_K$. (Solange hier noch nicht mehr dazu steht: Siehe auch Abschnitt ALG.3.8.)

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Großer_Fermatscher_Satz

Verweise der Form Kapitel LA1.4, Abschnitt LA2.15.1, Satz ALG.3.22 verweisen auf die Vorlesungsskripte zur Linearen Algebra 1 [**LA1**], Linearen Algebra 2 [**LA2**] und Algebra [**ALG**]. Wenn Sie die entsprechenden PDF-Dateien unter den Dateinamen `la1.pdf`, `la2.pdf` beziehungsweise `algebra.pdf` im selben Verzeichnis ablegen wie dieses Skript, dann sollten diese Referenzen »anklickbar« sein.

KAPITEL 2

Ringe und Moduln

2.1. Ringe und Ideale

Wir beginnen mit der Wiederholung einiger Begriffe, die schon in der Linearen Algebra 2 und Algebra eingeführt wurden (insbesondere *Ringe*, *Ideale*, *Primideale* und *maximale Ideale*) und die wir in dieser Vorlesung genauer studieren werden.

2.1.1. Definitionen.

DEFINITION 2.1. Eine Menge R zusammen mit Verknüpfungen $+\colon R \times R \to R$ (Addition) und $\cdot\colon R \times R \to R$ (Multiplikation) heißt *kommutativer Ring mit 1*, falls gilt:

(a) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (Wir bezeichnen das neutrale Element bezüglich $+$ stets mit 0.), und

(b) die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ, besitzt ein neutrales Element (das wir immer mit 1 bezeichnen), verhält sich distributiv bezüglich $+$ und ist kommutativ.

$\dashv$

Sofern nicht ausdrücklich etwas Anderes gesagt wird, verstehen wir in diesem gesamten Skript unter einem Ring immer einen kommutativen Ring mit 1.

Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen: Der Multiplikationspunkt wird üblicherweise ausgelassen. Das Inverse von $a \in R$ bezüglich der Addition wird mit $-a$ bezeichnet, wir schreiben $a - b$ statt $a + (-b)$.

BEISPIEL 2.2. (1) Die Menge $R = \{0\}$ mit $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, ist ein Ring, der sogenannte *Nullring*. Dies ist der einzige Ring, in dem $1 = 0$ gilt. Wir schreiben einfach $R = 0$.

(2) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Ring.

(3) Ist R ein Ring, dann können wir die Polynomringe $R[X]$ in einer, $R[X_1, \dots, X_n]$ in endlich vielen und $R[X_i;\ i \in I]$ in beliebig vielen Unbestimmten bilden. Siehe Abschnitt ALG.A.2.2.

(4) Sind R_1, R_2 Ringe, dann ist das kartesische Produkt $R_1 \times R_2$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation ein Ring. Allgemeiner kann man für jede Indexmenge I und Familie von Ringen R_i, $i \in I$, das Produkt $\prod_{i\in I} R_i$ mit den komponentenweisen Operationen zu einem Ring machen.

$\lozenge$

DEFINITION 2.3. Sei R ein Ring.

(1) Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, falls ein Element $b \in R$ existiert mit $ab = 1$. Die Menge $R^\times$ aller Einheiten in R bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, die sogenannte *Einheitengruppe*.

(2) Ein Element $a \in R$ heißt *Nullteiler*, falls ein Element $b \in R$, $b \neq 0$, existiert mit $ab = 0$. Ist $R \neq 0$ und hat R keine Nullteiler außer 0, so heißt R *Integritätsring*.

(3) Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $n \geq 1$ existiert mit $a^n = 0$.

⊣

Bemerkung 2.4. Sind $u \in R^\times$ und $a \in R$ nilpotent, so ist $u - a \in R^\times$. Es ist ausreichend, das für $u = 1$ zu zeigen, weil mit a auch $u^{-1}a$ nilpotent ist. Es gilt aber $(1-a)\left(\sum_{i\geq 0} a^i\right) = 1$. Die Summe hier ist nur formal unendlich, weil mit a offenbar auch $-a$ nilpotent ist. Vergleiche die geometrische Reihe. Weil mit a auch $-a$ nilpotent ist, folgt auch $u + a \in R^\times$. ◊

Definition 2.5. Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ heißt *Ringhomomorphismus*, wenn gilt:

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in R$,

(b) $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in R$,

(c) $f(1) = 1$.

Die Menge aller Ringhomomorphismen von R nach S bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(R, S)$. ⊣

Definition 2.6. Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ heißt *Ringisomorphismus*, wenn f einen Umkehrhomomorphismus besitzt, d.h., wenn ein Ringhomomorphismus $g\colon S \to R$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_R, f \circ g = \mathrm{id}_S$. ⊣

Es ist klar, dass jeder Ringisomorphismus bijektiv ist, und nicht schwer zu zeigen, dass jeder bijektive Ringhomomorphismus ein Isomorphismus ist.

Beispiel 2.7. (1) Sei R ein Ring. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ (siehe Beispiel ALG.3.2). Wenn wir eine ganze Zahl als Element von R auffassen, ist immer ihr Bild unter diesem Ringhomomorphismus gemeint (insbesondere für $n \geq 0$ die n-fache Summe $1 + \cdots + 1$ in R). *Achtung: Dieser Ringhomomorphismus ist im allgemeinen nicht injektiv.*

(2) Ist $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und sind $x_1, \dots, x_n \in S$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\Phi\colon R[X_1, \dots, X_n] \to S$ mit $\Phi(a) = a$ für alle $a \in R$ und $\Phi(X_i) = x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir nennen Φ den (zu φ und $x_1, \dots, x_n$ gehörigen) *Einsetzungshomomorphismus*. Insbesondere haben wir den Einsetzungshomomorphismus im Spezialfall $n = 1$. Allgemeiner kann man genauso den Fall beliebieg vieler Unbestimmter betrachten.

◊

Definition 2.8. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ eines Ringes R heißt *Unterring*, falls $0, 1 \in S$ und S abgeschlossen bezüglich $+, -$ und $\cdot$ ist. ⊣

Definition 2.9. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq R$ heißt *Ideal*, wenn $\mathfrak{a}$ eine Untergruppe bezüglich der Addition ist, und wenn für alle $x \in R, y \in \mathfrak{a}$ gilt, dass $xy \in \mathfrak{a}$. ⊣

Bemerkung 2.10. (1) In jedem Ring R sind $\{0\}$ (das *Nullideal*) und R (das *Einsideal*) Ideale.

(2) Der Durchschnitt von Idealen ist ein Ideal.

(3) Sind R ein Ring und ist $X \subseteq R$ eine Teilmenge, so ist

$$(X) := \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq R \text{ Ideal}, X \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{a} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i;\ n \geq 0, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

das kleinste Ideal von R, das X enthält. Wir nennen (X) das von X erzeugte Ideal. Ist $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreiben wir $(x_1, \dots, x_n) := (X)$. Beispiel: $(0) = \{0\}$, $(1) = R$. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *endlich erzeugt*, wenn endlich viele Elemente $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$ existieren mit $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *Hauptideal*, wenn ein Element $a \in \mathfrak{a}$ existiert mit $\mathfrak{a} = (a)$. Ein Integritätsring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt *Hauptidealring*.

(4) Sei R ein Ring. Sind $\mathfrak{a}_\nu \subseteq R$ Ideale, so heißt das von $\bigcup_\nu \mathfrak{a}_\nu$ erzeugte Ideal die *Summe* der Ideale $\mathfrak{a}_\nu$, in Zeichen $\sum_\nu \mathfrak{a}_\nu$. Es gilt

$$\sum_\nu \mathfrak{a}_\nu = \left\{ \sum_\nu x_\nu;\ x_\nu \in \mathfrak{a}_\nu,\ \text{nur endlich viele } x_\nu \text{ ungleich } 0 \right\}.$$

$\diamondsuit$

DEFINITION 2.11. Seien R ein Ring und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale von R. Dann heißt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (ab;\ a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}) = \left\{ \sum_i a_i b_i;\ a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}$$

das *Produkt* der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. $\dashv$

LEMMA 2.12. *Sei $f\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist der* Kern $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(0)$ *von f ein Ideal von R und das* Bild $\operatorname{Im} f = f(R)$ *von f ein Unterring von R'.*

DEFINITION 2.13. Eine *R-Algebra* ist ein (Ring A zusammen mit einem) Ringhomomorphismus $R \to A$ (dieser Homomorphismus heißt auch der *Strukturmorphismus*. Ein *Homomorphismus* zwischen R-Algebren $\varphi\colon R \to A$, $\psi\colon R \to B$ ist ein Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$, so dass $f \circ \varphi = \psi$. Die Menge aller R-Algebren-Homomorphismen von A nach B bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}_R(A, B)$. $\dashv$

2.1.2. Der Quotient nach einem Ideal.

Definition des Quotientenbegriffs durch die universelle Eigenschaft.

DEFINITION 2.14. Seien R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Eine R-Algebra $\pi\colon R \to \overline{R}$ heißt *Quotient von R nach* $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ gilt und für jeden Ring S die Abbildung

$$\operatorname{Hom}(\overline{R}, S) \longrightarrow \{f \in \operatorname{Hom}(R, S);\ \operatorname{Ker}(f) \supseteq \mathfrak{a}\}, \quad \psi \mapsto \psi \circ \pi,$$

eine Bijektion ist. $\dashv$

BEMERKUNG 2.15. (1) In der Definition kann man die Bedingung $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ fallenlassen, weil sie aus der zweiten Bedingung folgt (denn für $S = \overline{R}$ liegt $\mathrm{id}_{\overline{R}}$ in der rechten Seite der Bijektion).

(2) Alternativ kann man einen Ringhomomorphismus $R \to S$ (also eine R-Algebra-Struktur auf S) von vorneherein fixieren und die Äquivalenz, dass f genau dann über π faktorisiert, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ gilt, dadurch ausdrücken, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(\overline{R}, S) \longrightarrow \{f \in \operatorname{Hom}_R(R, S);\ \operatorname{Ker}(f) \supseteq \mathfrak{a}\}, \quad \psi \mapsto \psi \circ \pi,$$

eine Bijektion ist. Hier werden also auf beiden Seiten R-Algebra-Homomorphismen betrachtet. (Das hat zur Folge, dass beide Seiten höchstens ein Element haben.)

(3) Im allgemeinen kann die obige Bedingung wie folgt ausformuliert werden: Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Der Homomorphismus f faktorisiert genau dann über π (d.h., lässt sich schreiben in der Form $f = \psi \circ \pi$ für ein $\psi\colon \overline{R} \to S$), wenn $\operatorname{Ker}(f) \supseteq \mathfrak{a}$. In diesem Fall ist ψ eindeutig bestimmt.

Das bedeutet: Der »wie üblich« konstruierte Quotient $R/\mathfrak{a}$ (siehe unten) ist ein Quotient im Sinne der obigen Definition — dies ist gerade der Homomorphiesatz.

(4) Aus der universellen Eigenschaft folgt, dass ein Quotient eindeutig bestimmt ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, siehe den Beweis von Satz LA2.18.4.

(5) Aus der obigen Definition geht nicht hervor, ob ein Quotient in diesem Sinne überhaupt immer existiert. Man kann mit dieser abstrakteren Definition also nicht darum herumkommen, die Konstruktion des Quotienten durchzuführen.

$\lozenge$

Konstruktion des Quotienten. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Die Relation

$$x \sim y \iff x - y \in \mathfrak{a}$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf R, deren Äquivalenzklassen wir als die Nebenklassen von $\mathfrak{a}$ in R bezeichnen. Die Äquivalenzklasse von $x \in R$ ist

$$\bar{x} := x + \mathfrak{a} := \{x + a;\ a \in \mathfrak{a}\}.$$

Die Menge $R/\mathfrak{a}$ der Äquivalenzklassen wird durch die (wohldefinierten!) Verknüpfungen

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}, \qquad \text{und}\ \bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{xy}$$

zu einem kommutativen Ring, und die Abbildung $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$, $x \mapsto \bar{x}$, die als die *kanonische Projektion* bezeichnet wird, ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Satz 2.16 (Homomorphiesatz/Universelle Eigenschaft des Quotienten). *Seien R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion.*

(1) *Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to R'$ faktorisiert genau dann über π (d.h. es existiert $\psi\colon R/\mathfrak{a}$ mit $\psi \circ \pi = \varphi$), wenn $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Der Homomorphismus ψ ist dann eindeutig bestimmt. (Wie oben bemerkt, besagt dieser Teil genau, dass $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ ein Quotient im Sinne der obigen Definition ist.)*

(2) *In diesem Fall gilt $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi$, und ψ ist genau dann injektiv, wenn $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\varphi$.*

Satz 2.17 (Ideale des Quotienten). *Seien R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann sind die Abbildungen*

$$\mathfrak{b} \mapsto \pi(\mathfrak{b}) \qquad \text{und}\ \mathfrak{c} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{c})$$

zueinander inverse, inklusionserhaltende Bijektionen zwischen der Menge aller Ideale von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten, und der Menge aller Ideale von $R/\mathfrak{a}$.

Beweis. Urbilder von Idealen unter Ringhomomorphismen sind Ideale. Bilder von Idealen unter surjektiven Ringhomomorphismen sind Ideale. Mit den Notationen aus dem Satz ist klar, dass $\pi^{-1}(\mathfrak{c})$ für alle $\mathfrak{c}$ das Ideal $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}(\pi)$ enthält. Daher liefern die angegebenen Zuordnungen tatsächlich Abbildungen zwischen der Menge der Ideale in R, die $\mathfrak{a}$ enthalten und der Menge der Ideale im Quotienten $R/\mathfrak{a}$. Es ist auch klar, dass sie inklusionserhaltend sind. Dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind, ist nleicht nachzuprüfen. $\square$

Weitere Literatur zum Thema *Ringe und Ideale*: Kapitel LA2.15, Kapitel ALG.3, [**AM**] Ch. 1, [**M2**] §1

2.2. Einschub: Topologische Räume

Ein grundlegender Bestandteil unserer Vorstellung von »geometrischen Objekten« ist es, Aussagen darüber treffen zu können, ob zwei Punkte nahe beieinander liegen, oder nicht. Besonders direkt spiegelt sich das in einem *metrischen Raum* wider, d.h., einer Menge X zusammen mit einer *Metrik*, oder *Abstandsfunktion*, $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die symmetrisch ist ($d(x,y) = d(y,x)$), für die $d(x,y) = 0$ genau dann gilt, wenn $x = y$, und die die Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{für alle } x,y,z \in X$$

erfüllt. Ein wichtiges Beispiel sind die Räume $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(x,y) := ||x-y||$, wobei $||-||$ die euklidische Norm bezeichnet:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Für unsere Zwecke ist dieser Begriff allerdings nicht geeignet, da auf den Räumen, die wir betrachten werden, eine geeignete Metrik nicht existiert. Ein schwächerer/allgemeinerer Begriff ist der des *topologischen Raumes*. Die Ausgangsüberlegung für dessen Definition besteht aus den folgenden beiden Punkten:

(1) Die Frage, ob eine Abbildung stetig ist, hängt eng mit der Ausgangsfrage zusammen, wann Punkte nahe beieinander liegen. (Denken Sie an das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit von Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.)

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann gilt: f ist genau dann stetig, wenn für alle offenen[1] Teilmengen $V \subseteq R^m$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Um den Begriff der Stetigkeit zu definieren, müssen wir also nur wissen, welche Teilmengen offen sind. Genauere Informationen über die Metrik sind nicht erforderlich.

Definition 2.18. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass gilt:

(a) $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$,

(b) Ist I eine Menge und sind $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

(c) Ist I eine endliche Menge und sind $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, so gilt $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen*, wenn $U \in \mathcal{O}$ ist. ⊣

Die Familie $\mathcal{O}$ wird auch als eine *Topologie auf* X bezeichnet. Ist X eine Menge und sind $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ Topologien auf X, so nennen wir $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{O}'$ (und dementsprechend $\mathcal{O}'$ gröber als $\mathcal{O}$), wenn $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. In der Regel sprechen wir einfach von dem topologischen Raum X und erwähnen die Familie $\mathcal{O}$ nicht eigens.

Definition 2.19. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus Z$ offen in X ist. ⊣

Definition 2.20. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist. ⊣

---

[1] Wir nennen $V \subseteq R^m$ *offen*, wenn für alle $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass der offene Ball um x mit Radius ε ganz in V liegt.

Äquivalent kann man die Stetigkeit von $f\colon X \to Y$ dadurch charakterisieren, dass das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

BEMERKUNG 2.21. Genau wie man zwischen Vektorräumen normalerweise nur *lineare Abbildungen* (mit anderen Worten: Vektorraumhomomorphismen) betrachtet, betrachtet man zwischen topologischen Räumen typischerweise nur stetige Abbildungen. In der Sprache der Kategorien (Abschnitt 3.1) sind stetige Abbildungen die *Morphismen* in der Kategorie der topologischen Räume. Eine stetige Abbildung $X \to Y$ zwischen topologischen Räumen, die eine stetige Umkehrabbildung besitzt, nennt man einen *Homöomorphismus*. Im Sinne von Definition 3.3 können wir also sagen: Ein Homöomorphismus ist ein Isomorphismus in der Kategorie der topologischen Räume. Ein Homöomorphismus ist, weil er eine Umkehrabbildung besitzt, notwendigerweise bijektiv. Aber nicht jede bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen ist ein Homöomorphismus! (Überlegen Sie sich ein Beispiel ..., eventuell lohnt es sich, vorher noch Beispiel 2.22 anzuschauen.) $\diamondsuit$

BEISPIEL 2.22. (1) Sei X ein metrischer Raum, zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik. Mit der obigen Definition offener Mengen wird X zu einem topologischen Raum. Die stetigen Abbildungen metrischer Räume im »üblichen« Sinne sind dann genau die stetigen Abbildungen im Sinne der vorherigen Definition.

(2) Sei X eine Menge. Die *diskrete Topologie* ist die Topologie, in der alle Teilmengen von X offen sind.

(3) Sei X eine Menge. Die *chaotische Topologie* (oder *Klumpentopologie*) ist die Topologie, in der $\emptyset$ und X die einzigen offenen Teilmengen von X sind.

$\diamondsuit$

DEFINITION 2.23. (1) Ein topologischer Raum X heißt *quasi-kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn für jede Familie U_i, $i \in I$, von offenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gilt: Es gibt eine endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i \in I'} U_i$.

(2) Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffsch*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$.

$\dashv$

Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch. Eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

DEFINITION 2.24. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die *Teilraumtopologie* auf Y (oder auch die *induzierte Topologie*) ist die Topologie für die die offenen Mengen in Y genau die Mengen der Form $U \cap Y$ mit $U \subseteq X$ offen sind. $\dashv$

DEFINITION 2.25. Sei X ein topologischer Raum und sei $Z \subseteq X$ eine Teilmenge. Der *Abschluss* $\overline{Z}$ von Z in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die Z enthält, mit anderen Worten der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die Z enthalten. $\dashv$

BEISPIEL 2.26. (1) Sei X ein topologischer Raum und sei Z eine Teilmenge von X. Genau dann ist Z eine abgeschlossene Teilmenge von X, wenn $Z = \overline{Z}$ gilt.

(2) Der Abschluss des offenen Intervalls (a, b) in $\mathbb{R}$ $(a < b)$ ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$. Der Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$.

$\diamondsuit$

Literatur zum Thema *topologische Räume*: Es gibt viele Bücher über (elementare) Topologie und Sie könnten das erste Kapitel in

K. Jänich, *Topologie*, Springer, 8. Aufl., 2005.
https://doi.org/10.1007/b138142

anschauen. Aber für die Vorlesung *Algebra 2* ist das schon übertrieben – uns reichen erstmal die einfachsten Grundlagen. Wenn Sie zusätzlich zum Skript eine weitere Quelle hinzuziehen möchten, würde ich daher eines der gängigen Analysis-Bücher empfehlen, zum Beispiel

O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg+Teubner, 9. Aufl., 2010.
https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8103-8
Kapitel I §1.

H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Springer, 14. Aufl., 2008.
Kapitel XIX.

2.3. Primideale und maximale Ideale

DEFINITION 2.27. Sei R ein Ring.

(1) Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt *Primideal*, falls $\mathfrak{p} \neq R$ und für alle $x, y \in R$ mit $xy \in \mathfrak{p}$ gilt: $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$.
(2) Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ heißt *maximales Ideal*, falls $\mathfrak{m} \neq R$, und für alle Ideale $\mathfrak{m}' \neq R$ mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$ gilt: $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

⊣

BEMERKUNG 2.28. (1) Sei R ein Ring. Das Nullideal ist genau dann ein Primideal von R, wenn R ein Integritätsring ist. Das ist leicht zu beweisen, folgt aber auch aus dem nächsten Satz.
(2) Sei R ein Integritätsring. Ein Hauptideal $0 \neq (a) \subseteq R$ ist genau dann ein Primideal, wenn a ein Primelement ist. (Aber in aller Regel gibt es auch Primideale, die keine Hauptideale sind.)

◊

SATZ 2.29. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal.*

(1) *Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{a}$ ein Integritätsring ist.*
(2) *Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $R/\mathfrak{a}$ ein Körper ist.*

Insbesondere gilt: Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

BEWEIS. Siehe Lemma ALG.3.17, Lemma ALG.3.19. □

SATZ 2.30. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, $\mathfrak{a} \neq R$. Dann besitzt R ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Insbesondere besitzt jeder Ring $R \neq 0$ ein maximales Ideal.*

BEWEIS. Siehe Satz ALG.3.22. □

SATZ 2.31. *Die Bijektionen in Satz 2.17 erhalten die Eigenschaften* Primideal *und* maximales Ideal.

BEWEIS. Wir schreiben $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ für die kanonische Projektion. Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq R$ gilt dann $R/\mathfrak{b} \cong (R/\mathfrak{a})/\pi(\mathfrak{b})$, denn die Verkettung $R \to R/\mathfrak{a} \to (R/\mathfrak{a})/\pi(\mathfrak{b})$ ist surjektiv mit Kern $\mathfrak{b}$. Deshalb folgt die Behauptung aus Satz 2.29. (Es geht natürlich auch leicht direkt; und für die Eigenschaft *maximales Ideal* ist die Behauptung insofern direkt klar, als die genannte Bijektion zwischen Idealen in R und $R/\mathfrak{a}$ inklusionserhaltend ist. □

BEISPIEL 2.32. Sei R ein Hauptidealring. Dann ist R faktoriell (Abschnitt ALG.3.4). Für ein Ideal $(a) \neq 0$ sind äquivalent:

(i) Das Element $a \in R$ ist irreduzibel.
(ii) Das Ideal (a) ist ein Primideal.
(iii) Das Ideal (a) ist ein maximales Ideal.

Wenn R kein Körper ist, dann ist das einzige nicht-maximale Primideal das Nullideal. Siehe Satz ALG.3.20. ◊

2.4. Das Primspektrum eines Rings

In diesem Abschnitt definieren wir (eine erste Version) des *(Prim-)Spektrums* eines Rings. Die grundlegende Idee ist, jedem Ring ein »geometrisches Objekt« $\operatorname{Spec}(R)$ zuzuordnen, derart dass man die Elemente des Ringes als Funktionen auf $\operatorname{Spec}(R)$ betrachten kann (auch wenn wir das nur mit Abstrichen werden verwirklichen können, ist es gut, diese Vorstellung als Motivation mitzunehmen). Es ist dann möglich, mit Methoden der (kommutativen) Algebra »geometrische« Eigenschaften von Räumen der Form $\operatorname{Spec}(R)$ zu beweisen und andersherum mit geometrischen Methoden Eigenschaften von Ringen zu beweisen. In der Vorlesung über kommutative Algebra werden wir das Spektrum als topologischen Raum definieren. In der algebraischen Geometrie wird dann darauf aufbauend das Spektrum mit der Struktur eines »lokal geringten Raums« versehen, was es insbesondere ermöglicht, Spektren von Ringen zu geometrischen Objekten zu »verkleben«, die nur lokal wie das Spektrum eines Rings »aussehen« (dies sollte man vergleichen mit dem Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, die lokal aussieht wir eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$).

Um die Interpretation der Elemente eines Rings als Funktionen auf einem Raum zu motivieren, betrachten wir die folgenden beiden Beispiele.

BEISPIEL 2.33. Sei X ein topologischer Raum und sei R der Ring der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$. (Die Ringstruktur ist wie üblich durch Addition und Multiplikation der Abbildungswerte gegeben. Null- und Einselement sind die konstanten Funktionen mit Wert 0 beziehungsweise 1.)

Sei $x \in X$. Dann ist die Auswertungsabbildung $\Phi_x\colon R \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$, ein Ringhomomorphismus. Weil konstante Abbildungen stetig sind, ist Φ_x surjektiv. Schreiben wir

$$\mathfrak{m}_x := \operatorname{Ker}(\Phi_x) = \{f \in R;\ f(x) = 0\},$$

so erhalten wir einen Isomorphismus $R/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal in R.

(Analog kann man zum Beispiel den Ring der differenzierbaren Funktionen $U \to \mathbb{R}$ für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten.) ◊

BEISPIEL 2.34. Sei nun R der Ring der *Polynomfunktionen* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann ist R isomorph zum Polynomring $\mathbb{C}[X]$ (indem wir einem Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ die Funktion $x \mapsto f(x)$ zuordnen).

Der Ring $R = \mathbb{C}[X]$ ist ein Hauptidealring, die maximalen Ideale in R sind die Ideale (f) für irreduzible Polynome f. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, sind nur lineare Polynome irreduzibel. Die Abbildung

$$x \mapsto \mathfrak{m}_x := (X - x)$$

ist also eine Bijektion zwischen $\mathbb{C}$ und der Menge der maximalen Ideale in $\mathbb{C}[X]$. ◊

Das vorherige Beispiel legt nahe, als »geometrisches Objekt«, das wir einem Ring R zuordnen, die Menge der maximalen Ideale von R zu verwenden (die »geometrische Struktur« bliebe noch zu diskutieren). Während das für eine wichtige Klasse von Ringen eine vernünftige Definition wäre, ist das im Allgemeinen nicht der beste Ansatz. Einer der Gründe ist, dass wir eine »funktorielle« Konstruktion suchen sollten. Das bedeutet, dass wir jedem Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ eine stetige Abbildung $\operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$ der zugehörigen topologischen Räume zuordnen wollen. Der einzige vernünftige Kandidat dafür wäre es, einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset S$ das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ zuzuordnen. Im allgemeinen ist aber das Urbild eines maximalen Ideals unter einem Ringhomomorphismus (zwar ein Ideal, aber) kein *maximales* Ideal. (Überlegen Sie sich ein Beispiel!) Dies ist also keine sinnvolle Definition. Andererseits sind Urbilder von Primidealen unter Ringhomomorphismen wieder Primideale (siehe unten).

DEFINITION 2.35. Sei R ein Ring. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Spec} R$ die Menge der Primideale in R und nennen $\operatorname{Spec} R$ das *Spektrum* oder *Primspektrum* von R. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Spm} R$ die Menge aller maximalen Ideale von R und nennen $\operatorname{Spm} R$ das *Maximalspektrum* von R. Offenbar ist $\operatorname{Spm} R \subseteq \operatorname{Spec} R$. ⊣

Als nächstes wollen wir die Menge $\operatorname{Spec}(R)$ mit der Struktur eines topologischen Raums versehen. Die Idee hierfür ist die folgende: Wir hatten als Motivation das Ziel angegeben, Elemente von R als »stetige Funktionen« auf $\operatorname{Spec}(R)$ betrachten. Die Nullstellenmenge einer stetigen Funktion sollte sicher abgeschlossen sein. Weil der Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen wieder abgeschlossen sein muss, muss dann auch die gemeinsame Nullstellenmenge einer Teilmenge von R (verstanden als Funktionen) abgeschlossen sein. In den obigen Beispielen ist $f(x) = 0$ äquivalent zu $f \in \mathfrak{m}_x$.

Ist $A \subseteq R$ eine Teilmenge, so setzen wir

$$V(A) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R;\ A \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Wir stellen uns $V(A)$ als die gemeinsame Nullstellenmenge aller Elemente von A vor (natürlich ist dies nur eine Motivation, weil wir nicht gesagt haben, wie wir die Elemente von R als Funktionen betrachten können und was es bedeuten soll, dass eine Funktion einem Punkt von $\operatorname{Spec}(R)$ den Wert 0 habe). Ist $\mathfrak{a}$ das von A erzeugte Ideal, dann gilt offenbar $V(\mathfrak{a}) = V(A)$. Wir werden daher die Konstruktion $V(-)$ in der Regel nur auf Ideale anwenden.

LEMMA 2.36. *Sei R ein Ring.*

(1) $V((0)) = \operatorname{Spec} R$, $V((1)) = \emptyset$.

(2) *Sind $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, Ideale von R, so gilt*

$$\bigcap_i V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_i \mathfrak{a}_i\right).$$

(3) *Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale von R, so gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

BEWEIS. Die Teile (1) und (2) sind einfach zu zeigen. Weil die Zuordnung $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ offensichtlich inklusionsumkehrend ist, ist auch $\subseteq$ in Teil (3) klar. Für die andere Inklusion dort betrachten wir ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Wenn $\mathfrak{p}$ nicht in $V(\mathfrak{a})$ liegt, dann existiert $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$. Ist dann $b \in \mathfrak{b}$, so folgt $sp \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, also $b \in \mathfrak{p}$. Folglich gilt in diesem Fall $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$. □

SATZ 2.37. *Die Mengen $V(\mathfrak{a})$ für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq R$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf* Spec R, *der sogenannten* Zariski-Topologie.

BEWEIS. Das folgt unmittelbar aus dem Lemma. □

Analog versehen wir das Maximalspektrum $\mathrm{Spm}(R)$ mit der induzierten Topologie (Definition 2.24) bezüglich der Inklusion $\mathrm{Spm}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$, und sprechen auch hier von der Zariski-Topologie. Benannt ist diese nach Oscar Zariski[2] (1899 – 1986).

BEISPIEL 2.38. (1) Sei $R = K$ ein Körper. Dann besteht $\mathrm{Spec}\, K$ aus nur einem Punkt. Alle Teilmengen sind offen und abgeschlossen.

(2) Das Spektrum des Nullrings ist die leere Menge (genauer: der leere topologische Raum), und der Nullring ist der einzige Ring, dessen Spektrum leer ist, denn jeder Ring $\neq 0$ besitzt ein maximales Ideal, also insbesondere ein Primideal.

(3) Sei $\mathrm{Spec}\, R$, R ein Hauptidealring. *Übung.* Beschreiben Sie den topologischen Raum $\mathrm{Spec}(R)$. Betrachten Sie speziell auch die Fälle $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ und (für einen Körper K) $\mathrm{Spec}\, K[X]$.

◊

SATZ 2.39. *Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist*

$$\varphi^a\colon \mathrm{Spec}\, S \to \mathrm{Spec}\, R, \qquad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}),$$

eine stetige Abbildung.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Teilmengen wieder abgeschlossen sind. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Wir zeigen die folgende genauere Behauptung, aus der insbesondere folgt, dass $(\varphi^a)^{-1}(V(\mathfrak{a}))$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}\, S$ ist.

Behauptung. Es ist $(\varphi^a)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})S)$, wobei $\varphi(\mathfrak{a})S$ das von $\varphi(\mathfrak{a})$ in S erzeugte Ideal bezeichne.

Begründung. Es gilt

$$\mathfrak{q} \in (\varphi^a)^{-1}(V(\mathfrak{a})) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in V(\varphi(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})S).$$

□

Die Konstruktion, einem Ringhomomorphismus φ die Abbildung φ^a zwischen den Spektren zuzuordnen, ist verträglich mit Verkettung (in dem Sinne, dass $(\psi \circ \varphi)^a = \varphi^a \circ \psi^a$ gilt) und ordnet der Identitätsabbildung $R \to R$ die Identitätsabbildung $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R)$ zu. (Mit der Sprechweise aus Kapitel 3 sagen wir: Diese Konstruktion ist »funktoriell«, oder genauer, einem Ring sein Spektrum und einem Ringhomomorphismus die assoziierte Abbildung zwischen den Spektren zuzuordnen, ist ein kontravarianter Funktor (Definition 3.7) von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der topologischen Räume. Siehe Abschnitt 3.1.4.)

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Oscar_Zariski

BEMERKUNG 2.40. Die offenen Teilmengen der Form $D(f) := \operatorname{Spec} R \setminus V(f)$ heißen *ausgezeichnete offene Teilmengen*. Sie bilden eine Basis der Topologie, d.h. dass jede offene Teilmenge von Spec R eine Vereinigung von Teilmengen dieser Form ist. Außerdem sind endliche Durchschnitte von ausgezeichneten offenen Teilmengen wieder ausgezeichnete offene Teilmengen sind. Es gilt nämlich

$$\operatorname{Spec} R \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f) \qquad \text{und} \quad D(f) \cap D(g) = D(fg).$$

$\diamondsuit$

BEISPIEL 2.41. (1) Die Elemente von $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X])$ sind einerseits das Nullideal (0) und andererseits die maximalen Ideale $(X - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

(2) Die Elemente von $\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X])$ sind einerseits das Nullideal (0) und andererseits die maximalen Ideale. Die maximalen Ideale sind die on irreduziblen Polynomen erzeugten Ideale (f). Es gilt $\deg(f) \leq 2$ und nach Skalierung können wir f als normiert annehmen. Im Fall $\deg(f) = 1$ hat f also die Form $f = (X - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Im Fall $\deg(f) = 2$ gilt $f = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$ für ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (das bis auf Übergang zum komplex Konjugierten eindeutig bestimmt ist).

(3) Die Inklusion $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ induziert (wenn wir sie als injektiven Ringhomomorphismus betrachten) die folgende Abbildung auf den Spektren: Das Nullideal wird auf das Nullideal abgebildet. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ wird das maximale Ideal $(X - \alpha) \subset \mathbb{C}[X]$ abgebildet auf das maximale Ideal $(X - \alpha) \subset \mathbb{R}[X]$. Für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ wird das maximale Ideal $(X - \alpha) \subset \mathbb{C}[X]$ abgebildet auf das maximale Ideal $((X - \alpha)(X - \overline{\alpha})) \subset \mathbb{R}[X]$.

$\diamondsuit$

Literatur zum Thema *Spektrum eines Rings*:
[**AM**] Ch. 1, Exercises 15–28. [**GW**] (2.1) – (2.4).

2.5. Lokale Ringe, Lokalisierung

Wir besprechen nun eine wichtige Konstruktion, um aus einem Ring weitere Ringe zu konstruieren, die sogenannte *Lokalisierung*. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der Konstruktion des Quotientenkörpers eines Integritätsrings. Einerseits wollen wir Ringe von Brüchen betrachten, wo nicht alle Elemente $\neq 0$ als Nenner zugelassen sind. Zum Beispiel ist die Teilmenge

$$\mathbb{Z}_{(2)} := \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid b \right\}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$. Andererseits wollen wir die Konstruktion auf Ringe verallgemeinern, die keine Integritätsringe sind.

DEFINITION 2.42. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *multiplikative Teilmenge* (oder *multiplikatives System*), falls $1 \in S$ und für $s, s' \in S$ stets $ss' \in S$ gilt. $\dashv$

Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Die auf der Menge $R \times S$ durch

$$(r, s) \sim (r', s') \iff \exists t \in S\colon t(rs' - r's) = 0$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (r, s) mit $\frac{r}{s}$, und die Menge der Äquivalenzklassen mit $S^{-1}R$.

Es ist leicht nachzurechnen, dass es sich hier tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt (der nicht-triviale Teil ist die Transitivität), allerdings benötigt man die Flexibilität, ein beliebiges Element $t \in S$ wählen zu dürfen. Wenn die Menge S keine Nullteiler enthält, dann spielt das Element t oben natürlich keine Rolle und man kann die Äquivalenzrelation in diesem Spezialfall auch durch $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' = r's$ definieren. Das ist natürlich insbesondere dann der Fall, wenn R ein Integritätsring ist und 0 nicht in S liegt.

Mit den (wohldefinierten!) Verknüpfungen

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'} \qquad \text{und } \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}$$

wird $S^{-1}R$ zu einem kommutativen Ring mit Nullelement $\frac{0}{1}$ und Einselement $\frac{1}{1}$. Die Abbildung $\tau\colon R \to S^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus, und es gilt $\tau(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$. *Achtung: Im allgemeinen ist die Abbildung τ nicht injektiv!*

Der Ring $S^{-1}R$ zusammen mit dem Homomorphismus τ heißt die *Lokalisierung von R nach S*. (Für eine Begründung des Terms *Lokalisierung* siehe Bemerkung 2.48.

SATZ 2.43 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung). *Mit den obigen Notationen gilt: Ist $\varphi\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus, so faktorisiert φ über $\tau\colon R \to S^{-1}R$ genau dann, wenn $\varphi(S) \subseteq (R')^\times$. In diesem Fall ist die Abbildung $\psi\colon S^{-1}R \to R'$ mit $\varphi = \psi \circ \tau$ eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Unter jedem Ringhomomorphismus werden Einheiten auf Einheiten abgebildet. Weil $\tau(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$ gilt, kann φ wie im Satz also höchstens dann über τ faktorisieren, wenn $\varphi(S) \subseteq (R')^\times$ gilt. Ist das andererseits der Fall, dann können wir ψ definieren durch $\psi(\frac{a}{s}) = \varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ (für $a \in R$, $s \in S$) und es ist leicht zu überprüfen, dass dann ψ wohldefiniert und ein Homomorphismus ist und $\varphi = \psi \circ \tau$ gilt sowie dass ψ der eindeutig bestimmte Homomorphismus mit dieser Eigenschaft ist. □

KOROLLAR 2.44. (Funktorialität der Lokalisierung) *Insbesondere gilt: Ist $f\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge, dann ist $f(S) \subset R'$ eine multiplikative Teilmenge von R', und f induziert einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $S^{-1}R \to f(S)^{-1}R'$, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R' \arrow[d] \\ S^{-1}R \arrow[r] & f(S)^{-1}R' \end{tikzcd}$$

kommutiert, nämlich $\frac{a}{s} \mapsto \frac{f(a)}{f(s)}$ für $a \in R$, $s \in S$.

Wir schreiben in der Situation des Korollars manchmal auch $S^{-1}R'$ statt $f(S)^{-1}R'$, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Ist R ein Integritätsring, $S \subseteq R \setminus \{0\}$ eine multiplikative Teilmenge, so gilt $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ genau dann, wenn $rs' = r's$ ist. Für einen Integritätsring R erhält man für $S = R \setminus \{0\}$ als Lokalisierung $S^{-1}R$ gerade den *Quotientenkörper* $\mathrm{Quot}(R)$ von R, siehe Abschnitt LA2.15.5.

Ist R ein Ring, $f \in R$, so ist $S := \{1, f, f^2, \dots\}$ eine multiplikative Teilmenge; in diesem Fall schreibt man $R_f := S^{-1}R$. Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $S := R \setminus p$ eine multiplikative Teilmenge; in diesem Fall schreibt man $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$.

BEMERKUNG 2.45. Sei R ein Ring, S eine multiplikative Teilmenge. Genau dann gilt $R = 0$, wenn $0 \in S$. Insbesondere ist für $f \in R$ die Lokalisierung R_f genau dann der Nullring, wenn f nilpotent ist. ◊

Als nächstes wollen wir die Menge der Primideale, also das Spektrum einer Lokalisierung untersuchen. Dazu ist das folgende Lemma nützlich.

LEMMA 2.46. *Seien R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und sei $\mathfrak{a}S^{-1}R$ das von $\tau(\mathfrak{a})$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal. Dann gilt*

$$\mathfrak{a}S^{-1}R = \left\{ \frac{x}{s};\ x \in \mathfrak{a},\ s \in S \right\}.$$

BEWEIS. Es ist klar, dass $\tau(\mathfrak{a})$ in der rechten Seite enthalten ist, und dass die rechte Seite in $\mathfrak{a}S^{-1}R$ liegt. Daher genügt es zu zeigen, dass die rechte Seite ein Ideal ist. Das folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathfrak{a}$ und den Rechenregeln in der Lokalisierung $S^{-1}R$. □

SATZ 2.47. *Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge und $\tau\colon R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung in die Lokalisierung. Dann induziert die Abbildung τ^a eine Bijektion*

$$\operatorname{Spec} S^{-1}R \to \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R;\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}, \quad \mathfrak{q} \mapsto \tau^{-1}(\mathfrak{q}).$$

Die Umkehrabbildung bildet $\mathfrak{p}$ ab auf das von $\tau(\mathfrak{p})$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal (das wir mit $\mathfrak{p}S^{-1}R$ bezeichnen).

BEWEIS. Wir überprüfen zuerst, dass die angegebenen Vorschriften Abbildungen zwischen diesen beiden Mengen liefern. Für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ ist jedenfalls $\tau^{-1}(\mathfrak{q})$ ein Primideal von R. Wäre $s \in \tau^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S$, dann wäre die Einheit $s \in S^{-1}R$ in $\mathfrak{q}$ und das kann nicht sein.

Ist andererseits $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, das S nicht schneidet, dann ist das von $\mathfrak{p}$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}S^{-1}R$ ein Primideal. Jedenfalls hat $1 \in S^{-1}R$ nicht die Form $\frac{x}{s}$ mit $x \in \mathfrak{p}$, $s \in S$, denn sonst gäbe es $t \in S$ mit $ts = x \in S \cap \mathfrak{p}$. Aus Lemma 2.46 folgt $1 \notin \mathfrak{p}S^{-1}R$. Sind $x, y \in R$ und $s, t \in S$ mit $\frac{x}{s}\frac{y}{t} \in \mathfrak{p}S^{-1}R$, also etwa (nach demselben Lemma) $\frac{xy}{st} = \frac{z}{u}$ mit $z \in \mathfrak{p}$, $u \in S$, dann existiert $v \in S$ mit

$$vuxy = vstz \in \mathfrak{p},$$

und weil wegen $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ weder v noch u in $\mathfrak{p}$ liegen, folgt $xy \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$ und damit $\frac{x}{s} \in \mathfrak{p}S^{-1}R$ oder $\frac{y}{t} \in \mathfrak{p}S^{-1}R$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind. Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$, dann ist die Gleichheit $\tau^{-1}(\mathfrak{q})S^{-1}R = \mathfrak{q}$ leicht zu sehen. Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ und gilt $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, dann folgt $\tau^{-1}(\mathfrak{p}S^{-1}R) = \mathfrak{p}$ leicht aus Lemma 2.46. □

Wenn man etwas genauer hinschaut (Übung ...) kann man zeigen, dass unter der Bijektion des Satzes die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ übereinstimmt mit der Teilraumtopologie auf dem Bild von τ^a, die von der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$ induziert wird.

BEMERKUNG 2.48. Sei R ein Ring. Im Spezialfall $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ für ein Element $f \in R$ erhalten wir eine Identifikation $D(f) = \operatorname{Spec}(R_f)$, wobei $D(f)$ die durch f gegebene ausgezeichnete offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ bezeichne, siehe Bemerkung 2.40.

Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so gilt

$$\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{f \in R,\ \mathfrak{p} \in D(f)} D(f) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U \subseteq \operatorname{Spec}(R) \text{ offen}} U.$$

Zur ersten Gleichheit ist nur zu beachten, dass die Primideale in $\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}}$ den Primidealen von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen, die in $\mathfrak{p}$ enthalten sind, mit anderen Worten denjenigen Primidealen, die keines der Elemente $f \in R \setminus \mathfrak{p}$ enthalten, und das sind genau diejenigen f, für die $\mathfrak{p} \in D(f)$ gilt. Die zweite Gleichheit in der Kette folgt daraus, dass die $D(f)$ eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec} R$ bilden.

Die Lokalisierungen R_f und $R_{\mathfrak{p}}$ sind also algebraische Konstruktionen, die es ermöglichen, »lokal auf dem topologischen Raum $\operatorname{Spec}(R)$ zu arbeiten«. ◊

DEFINITION 2.49. Ein Ring R heißt *lokaler Ring*, wenn R genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ besitzt. Wir bezeichnen dann den Körper $R/\mathfrak{m}$ als den *Restklassenkörper* von R. Wir schreiben manchmal »Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.« als Kurzform für »Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.« Wir schreiben auch »Sei $(R, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring.« als Kurzform für: »Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k.« ⊣

SATZ 2.50. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Ring R ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.*
(ii) *Es gilt $R \setminus \mathfrak{m} \subseteq R^\times$.*
(iii) *Das Ideal $\mathfrak{m}$ ist maximal und für alle $x \in \mathfrak{m}$ ist $1 + x \in R^\times$.*

BEWEIS. Übung. □

Beispiele für lokale Ringe sind Körper und die Ringe

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b \right\}, \qquad p \text{ Primzahl.}$$

Allgemeiner gilt der folgende Satz.

SATZ 2.51. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann ist die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.*

BEWEIS. Das folgt direkt aus der Beschreibung der Menge der Primideale der Lokalisierung, Satz 2.47. Siehe auch Bemerkung 2.48. □

DEFINITION 2.52. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann heißt

$$\kappa(\mathfrak{p}) := R_\mathfrak{p} / \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$$

der *Restklassenkörper* von R in $\mathfrak{p}$. ⊣

BEGRÜNDUNG DER IDENTIFIKATION. Das Gleichheitszeichen hier ist so zu verstehen, dass die natürlichen Abbildungen zwischen den beiden Seiten zueinander inverse Isomorphismen sind. Die Abbildung $R \to R/\mathfrak{p} \to \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$ hat Kern $\mathfrak{p}$. Weil der Wertebereich ein Körper ist, werden alle Elemente aus $R \setminus \mathfrak{p}$ auf Einheiten abgebildet, so dass die Abbildung über einen Homomorphismus $R_\mathfrak{p} \to \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$ faktorisiert. Dieser hat Kern $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ und faktorisiert daher über einen (injektiven) Ringhomomorphismus $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$.

Man kann nun direkt zeigen, dass dieser Homomorphismus auch surjektiv ist. Alternativ betrachte man die Abbildung $R \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Der Kern dieser Abbildung ist $\mathfrak{p}$ (offenbar liegt $\mathfrak{p}$ im Kern, und alle Elemente $\notin \mathfrak{p}$ werden auf Einheiten abgebildet). Wir erhalten daher eine Abbildung $R/\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, die auf den Quotientenkörper $\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$ fortgesetzt werden kann. Es ist mehr oder weniger klar, dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind (soll heißen: Sie sollten sich das jetzt überlegen). □

Zu jedem $f \in R$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, bezeichnen wir mit $f(\mathfrak{p})$ das Bild von f in $\kappa(\mathfrak{p})$. In dieser Weise kann man die Elemente von f als Funktionen auf $\operatorname{Spec} R$ auffassen. Zum Beispiel ist $f(\mathfrak{p}) = 0$ äquivalent zu $f \in \mathfrak{p}$. Damit können wir

$$V(f) = \{x \in \operatorname{Spec}(R);\ f(x) = 0\}$$

als die »Nullstellenmenge« oder »Verschwindungsmenge« von f und allgemeiner

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in \operatorname{Spec}(R);\ \text{für alle } f \in \mathfrak{a} : f(x) = 0\}$$

als den Ort, wo alle Elemente von $\mathfrak{a}$ gleichzeitig verschwinden betrachten. Entsprechend ist

$$D(f) = \{x \in \operatorname{Spec}(R);\ f(x) \neq 0\}$$

die (offene) Teilmenge der Punkte, wo f nicht den Wert 0 hat.

Literatur zum Thema *Lokalisierung*: [**AM**] Ch. 3, [**M2**] §4.

2.6. Radikale

DEFINITION 2.53. Sei R ein Ring. Das Ideal

$$\mathrm{Jac}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Spm}\, R} \mathfrak{m}$$

heißt das *Jacobson-Radikal von R*. ⊣

BEISPIEL 2.54. (1) $\mathrm{Jac}(\mathbb{Z}) = 0$.

(2) Ist k ein Körper, so ist $\mathrm{Jac}(k[X]) = 0$.

◊

LEMMA 2.55. *Sei R ein Ring. Dann gilt*

$$\mathrm{Jac}(R) = \{x \in R;\ \forall y \in R : 1 + xy \in R^\times\}.$$

BEWEIS. Sei zunächst $x \in \mathrm{Jac}(R)$ und $y \in R$. Dann ist auch $xy \in \mathrm{Jac}(R)$. Das bedeutet aber, dass $1 + xy$ in *keinem* maximalen Ideal von R enthalten ist. Weil jedes echte Ideal in einem maximalen Ideal enthalten ist, folgt $(1+xy) = R$, also $1+xy \in R^\times$. Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in R$, so dass $1 + xy \in R^\times$ für alle $y \in R$ gilt. Sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Wäre $x \notin \mathfrak{m}$, dann wär das Bild von x in $R/\mathfrak{m}$ eine Einheit, es gibt also $y \in R$, so dass xy Bild -1 in $R/\mathfrak{m}$ hat. Das bedeutet aber $1 + xy \in \mathfrak{m}$, ein Widerspruch. □

DEFINITION 2.56. Sei R ein Ring. Das Ideal

$$\mathrm{Rad}(R) := \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\, R} \mathfrak{p}$$

heißt das *(Nil-)Radikal von R*. ⊣

DEFINITION 2.57. Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $n \geq 0$ existiert mit $x^n = 0$. Der Ring R heißt *reduziert*, wenn R keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält. ⊣

Im Sinne der Interpretation von Elementen von R als Funktionen auf $\mathrm{Spec}(R)$ sind die Elemente des Nilradikals $\mathrm{Rad}(R)$ genau die Elemente, die als Funktion die konstante Funktion 0 ergeben. Das bedeutet, dass für nicht-reduzierte Ringe ein Element von R nicht durch die zugehörige Funktion auf $\mathrm{Spec}(R)$ bestimmt ist. Diese Sichtweise »funktioniert« also dann nicht mehr richtig. Dennoch ist es nützlich, auch nicht-reduzierte Ringe in die weiteren Betrachtungen miteinzubeziehen.

SATZ 2.58. *Sei R ein Ring. Dann gilt*

$$\mathrm{Rad}(R) = \{x \in R;\ x \textit{ nilpotent}\}.$$

BEWEIS. Sei $x \in \mathrm{Rad}(R)$. Dann ist $\mathrm{Spec}(R_x) = \emptyset$ (Satz 2.47), also besitzt R_x kein Primideal und erst recht kein maximales Ideal, es handelt sich daher um den Nullring. Das bedeutet, dass x nilpotent ist (Bemerkung 2.45). Ist andererseits x nilpotent, dann ist offensichtlich, dass x in jedem Primideal liegt. □

SATZ 2.59. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Dann ist*

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \{x \in R;\ \exists n \geq 0 : x^n \in \mathfrak{a}\},$$

und dieses Ideal heißt das Radikal von $\mathfrak{a}$ *und wird mit* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ *bezeichnet. Gilt* $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$*, so nennt man* $\mathfrak{a}$ *auch* Radikalideal.

BEWEIS. Wir beweisen diese Verallgemeinerung des vorherigen Satzes, indem wir sie durch Übergang zum Quotienten auf diesen zurückführen. Die Inklusion $\supseteq$ ist wieder klar. Ist andererseits $x \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$, dann ist die Restklasse von x im Quotienten $R/\mathfrak{a}$ ein Element des Nilradikals von $R/\mathfrak{a}$ (Satz 2.17, Satz 2.31). Also ist die Restklasse von x nilpotent, und das bedeutet genau, dass eine Potenz von x in $\mathfrak{a}$ liegt. □

Ist R ein Ring, und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so gilt $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Genauer gilt:

SATZ 2.60. *Sei R ein Ring. Die Abbildungen V, die einem Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *die Teilmenge* $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} R$ *zuordnet, und I, die einer Teilmenge* $Y \subseteq \operatorname{Spec} R$ *das Ideal* $I(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} \mathfrak{p}$ *zuordnet, haben die Eigenschaften*

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} \quad \textit{und} \quad V(I(Y)) = \overline{Y},$$

wobei $\overline{Y}$ *den Abschluss von Y bezüglich der Zariski-Topologie bezeichnet.*

Wir erhalten so zueinander inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\{\textit{Radikalideale in } R\} \longleftrightarrow \{\textit{abgeschlossene Teilmengen in } \operatorname{Spec} R\}.$$

BEWEIS. Es ist klar, dass die Operationen $V(-)$ und $I(-)$ inklusionsumkehrend sind. Nach den Definitionen und Satz 2.59 gilt

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Weiterhin gilt

$$V(I(Y)) = \{\mathfrak{p};\ I(Y) \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p};\ \bigcap_{\mathfrak{q}\in Y} \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Es ist klar, dass diese Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ abgeschlossen ist und dass sie Y enthält. Also enthält sie auch den Abschluss $\overline{Y}$ von Y. Wir müssen noch zeigen, dass es sich bei $V(I(Y))$ um die *kleinste* abgeschlossene Teilmenge handelt, die Y enthält, also dass $V(I(Y))$ jede abgeschlossene Teilmenge enthält, die Y enthält. Die abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(R)$ sind von der Form $V(\mathfrak{b})$ für ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq R$. Gilt $Y \subseteq V(\mathfrak{b})$, dann folgt $I(Y) \supseteq I(V(\mathfrak{b}))$ und mit dem schon Gezeigten, dass

$$\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}} = I(V(\mathfrak{b})) \subseteq I(Y).$$

Also gilt $V(I(Y)) \subseteq V(\mathfrak{b})$, und das war zu zeigen.

Weil die Abbildungen $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ und $Y \mapsto I(Y)$ für Radikalideale und abgeschlossene Teilmengen zueinander invers sind, folgt, dass man die Bijektion am Ende des Satzes erhält. □

Das folgende Lemma heißt in der englischsprachigen Literatur das *prime avoidance lemma*. Es lässt sich auch noch weiter verschärfen (es genügt, dass alle bis auf zwei von den Idealen $\mathfrak{p}_i$ Primideale sind).

LEMMA 2.61. *Sei R ein Ring,* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von R, und seien* $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R$ *mit*

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Dann existiert ein i mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$.

BEWEIS. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Im Fall $n > 1$ genügt es nun zu zeigen, dass $\mathfrak{a}$ in einer Vereinigung von $n-1$ der Ideale $\mathfrak{p}_i$ enthalten ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Wir finden dann Elemente

$$a_j \in \mathfrak{a} \setminus \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Weil nach Voraussetzung $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ gilt, folgt $a_j \in \mathfrak{p}_j$ für alle j. Sei nun $a = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_n$. Es ist klar, dass $a \in \mathfrak{a}$ gilt. Für $j = 1, \dots, n-1$ liegt a nicht in $\mathfrak{p}_j$, denn sonst wäre auch $a_n = a - a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ in $\mathfrak{p}_j$. Es gilt aber auch $a \notin \mathfrak{p}_n$, denn sonst wäre $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = a - a_n$ in $\mathfrak{p}_n$, und weil $\mathfrak{p}_n$ ein Primideal ist, auch eines der $a_j, j < n$ – ein Widerspruch. □

BEMERKUNG 2.62. Das *prime avoidance lemma* hat die folgende geometrische »Übersetzung«. Seien R ein Ring und $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Spec}(R)$. Ist $U \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ eine offene Teilmenge, die $x_1, \dots, x_n$ enthält, dann existiert ein Element $f \in R$, so dass $D(f) \subseteq U$ gilt und dass $x_1, \dots, x_n$ in $D(f)$ liegen. (Der Fall $n = 1$ ist die uns schon bekannte Aussage, dass die Mengen der Form $D(f)$ eine Basis der Topologie von $\operatorname{Spec}(R)$ bilden, Bemerkung 2.40.) ◊

Im Gegensatz zum prime avoidance lemma ist die folgende Aussage fast offensichtlich. Versuchen Sie erstmal, selbst einen Beweis zu finden, bevor Sie den hier angegebenen lesen.

LEMMA 2.63. *Sei R ein Ring, seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq R$ Ideale, und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Wenn*

$$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq p,$$

so gibt es ein i mit $\mathfrak{a}_i \subseteq p$. Gilt in der Voraussetzung sogar Gleichheit, so gilt sogar $\mathfrak{a}_i = p$.

BEWEIS. Wäre keines der $\mathfrak{a}_i$ in $\mathfrak{p}$ enthalten, dann gäbe es Elemente $a_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{p}$, $i = 1, \dots, n$. Dann wäre aber das Produkt $a_1 \cdots a_n$ in $\mathfrak{a}$, jedoch wegen der Primidealeigenschaft nicht in $\mathfrak{p}$, ein Widerspruch. Der Zusatz am Ende ist klar. □

Literatur zum Thema *Radikale*: [**AM**] Ch. 1, [**M2**] §1

2.7. Moduln

DEFINITION 2.64. Sei R ein Ring. Eine Menge M zusammen mit Verknüpfungen $+\colon M \times M \to M$, $\cdot\colon R \times M \times M$ heißt *R-Modul*, wenn gilt:

(a) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
(b) für alle $r, s \in R, m \in M$ gilt: $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$,
(c) für alle $r, s \in R, m, n \in M$ gilt: $(r+s)m = rm + sm, r(m+n) = rm + rn$,
(d) für alle $m \in M$ gilt: $1 \cdot m = m$.

⊣

DEFINITION 2.65. Sei R ein Ring. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen R-Moduln M und N heißt *R-Modul-Homomorphismus*, falls gilt:

$$f(m + m') = f(m) + f(m'), \quad f(xm) = xf(m) \quad \text{für alle } m, m' \in M, x \in R.$$

Ein *Isomorphismus* zwischen R-Moduln ist ein Homomorphismus, der einen Umkehrhomomorphismus besitzt. ⊣

Für R-Moduln M, N trägt die Menge $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ aller R-Modul-Homomorphismen durch die Gruppenstruktur auf N die Struktur einer abelschen Gruppe (und sogar, induziert durch die R-Modulstruktur auf N, die Struktur eines R-Moduls). Wie im Vektorraumfall überprüft man leicht, dass jeder bijektive Homomorphismus ein Isomorphismus ist.

BEISPIEL 2.66. (1) Sei R ein Ring. Der Modul $\{0\}$ heißt der *Nullmodul* und wird auch einfach mit 0 bezeichnet.

(2) Ist R ein Körper, so ist ein R-Modul nichts anderes als ein R-Vektorraum, und ein R-Modul-Homomorphismus nichts anderes als ein R-Vektorraum-Homomorphismus.

(3) Sei R ein Ring. Dann ist R (mit der Ringaddition und der Ringmultiplikation als Skalarmultiplikation) ein R-Modul.

$\lozenge$

BEMERKUNG 2.67. Sei R ein Ring. Ist A eine R-Algebra (via $\varphi\colon R \to A$), so ist A ein Ring, und trägt gleichzeitig eine R-Modulstruktur, so dass die Ringaddition und die Moduladdition übereinstimmen, und die Ringmultiplikation und die Skalarmultiplikation verträglich sind: $r(xy) = (rx)y = x(ry)$ für alle $r \in R, x, y \in A$: Wir definieren nämlich die Skalarmultiplikation durch $r \cdot x := \varphi(r)x$, wobei auf der rechten Seite die Ringmultiplikation in A verwendet wird.

Ist andererseits A ein Ring, der gleichzeitig ein R-Modul ist, so dass die obigen Verträglichkeiten gelten, dann wird A durch $\varphi\colon R \to A, r \mapsto r \cdot 1$ zu einer R-Algebra. $\lozenge$

Genauer sollte man die hier definierten Algebren als *assoziative kommutative Algebren mit Eins* bezeichnen. Andere Algebren kommen aber in diesem Skript nicht vor.

DEFINITION 2.68. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt *Untermodul*, falls $0 \in N$ und N abgeschlossen ist unter Addition und unter Skalarmultiplikation mit Elementen aus R. $\dashv$

BEMERKUNG 2.69. Weil $(-1)n = -n$ ist ein Untermodul stets abgeschlossen unter Bildung des additiven Inversen. Daher ist eine Teilmenge eines R-Moduls genau dann ein Untermodul, wenn sie mit den Einschränkungen von $+$ und $\cdot$ selbst ein R-Modul ist. $\lozenge$

Die R-Untermoduln von R (Beispiel 2.66 (3)) sind genau die Ideale von R. Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist »dasselbe« wie eine abelsche Gruppe; unter dieser Entsprechung entsprechen sich die Begriffe von Modulhomomorphismus und Gruppenhomomorphismus, und die Begriffe von Untermodul und Untergruppe.

DEFINITION 2.70. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt *frei*, wenn er eine Basis besitzt, d.h. wenn eine Familie $(b_i)_i$ von Elementen aus M existiert, so dass sich jedes $m \in M$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der b_i mit Koeffizienten in R schreiben lässt. $\dashv$

Über einen Körper sind alle Moduln frei: Das ist gerade der Satz, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Andererseits ist zum Beispiel der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2$ nicht frei.

BEMERKUNG 2.71. Sei R ein Ring.

(1) Die triviale abelsche Gruppe $\{0\}$ kann in eindeutiger Weise zu einem R-Modul gemacht werden, den wir auch mit 0 bezeichnen. Dieser Modul heißt der Nullmodul. Der Ring R selbst ist in offensichtlicher Weise ein (freier) R-Modul.

(2) Sei M ein R-Modul. Der Durchschnitt von Untermoduln von M ist ein Untermodul.

(3) Sind R ein Ring, M ein R-Modul und ist $X \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist

$$\langle X\rangle_R := \bigcap_{N\subseteq M \text{ Untermodul}, X\subseteq N} N = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i;\ n \geq 0, a_i \in R, x_i \in X\right\}$$

der kleinste Untermodul von M, der X enthält. Wir nennen $\langle X\rangle_R$ den von X erzeugten Untermodul. Ist $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, so schreiben wir $\langle x_1, \dots, x_n\rangle_R := \langle X\rangle_R$. Ein Untermodul N heißt *endlich erzeugt*, wenn endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in N$ existieren mit $N = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

(4) Sind $N_\nu \subseteq M$ Untermoduln, so heißt der von $\bigcup_\nu N_\nu$ erzeugte Untermodul die *Summe* der Untermoduln N_ν, in Zeichen $\sum_\nu N_\nu$.

$\diamond$

Definition 2.72. Sei R ein Ring, $f\colon M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Dann sind der *Kern* $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(0)$ und das *Bild* $\operatorname{Im} f := f(M)$ von f Untermoduln von M bzw. von N. $\dashv$

Definition 2.73. Sei R ein Ring. Sind M, N Moduln über R, so ist die Menge $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ aller R-Modul-Homomorphismen von M nach N in natürlicher Weise ein R-Modul. $\dashv$

Definition 2.74. Sei R ein Ring, und sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln.

(1) Das kartesische Produkt $\prod_i M_i$ ist mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein R-Modul, das *(direkte) Produkt* der M_i. Das Produkt zusammen mit den Projektionen $\pi_j\colon \prod_i M_i \to M_j$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für alle R-Moduln T ist die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(T, \prod_i M_i) \to \prod_i \operatorname{Hom}_R(T, M_i), \quad f \mapsto (\pi_i \circ f)_i,$$

eine Bijektion.

(2) Die Teilmenge

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i)_i \in \prod_i M_i;\ m_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i\}$$

ist ein Untermodul von $\prod_i M_i$ und heißt die *direkte Summe* der M_i. Die direkte Summe zusammen mit den Inklusionen $\iota_j\colon M_j \to \bigoplus_i M_i$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für alle R-Moduln T ist die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(\bigoplus M_i, T) \to \prod_i \operatorname{Hom}_R(M_i, T), \quad f \mapsto (f \circ \iota_i)_i,$$

eine Bijektion.

(3) Ist speziell $M_i = M$ für alle i, so schreiben wir auch $M^I := \prod_i M$, $M^{(I)} := \bigoplus_i M$. Ist $I = \{1, \dots n\}$, so schreiben wir $R^n := R^I$.

$\dashv$

Ist die Indexmenge I in der Definition endlich, so stimmen direktes Produkt und direkte Summe überein. Wie erwähnt lassen sich direktes Produkt und direkte Summe durch universelle Eigenschaften charakterisieren, es handelt sich gerade um das Produkt und das Koprodukt in der Kategorie der R-Moduln, siehe Definition 3.3, Abschnitt LA2.18.1.

LEMMA 2.75. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Der R-Modul M ist genau dann frei, wenn eine Menge I existiert, so dass $M \cong R^{(I)}$. Der R-Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn eine endliche Menge I und ein surjektiver R-Modul-Homomorphismus $R^I \to M$ existieren.*

BEWEIS. Sind I eine Menge und $m_i \in M$, $i \in I$, dann erhalten wir den R-Modul-Homomorphismus $R^{(I)} \to M$, $(x_i)_i \mapsto \sum_{i\in I} x_i m_i$. Sein Bild ist der von den m_i erzeugte Untermodul von M, sein Kern ist die Menge aller Tupel $(x_i)_i$, für die die zugehörige Linearkombination der m_i den Wert 0 hat. Daraus folgen beide Aussagen des Lemmas. □

2.7.1. Quotient eines Moduls nach einem Untermodul. Ist R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul, so ist die abelsche Gruppe M/N in natürlicher Weise ein R-Modul (mit $r(m+N) := (rm) + N$ als Skalarmultiplikation), und es gilt die offensichtliche Version des Homomorphiesatzes. Als Folgerung aus Lemma 2.75 und dem Homomorphiesatz erhalten wir die folgende Aussage.

LEMMA 2.76. *Ein R-Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn $n \geq 0$ und ein Untermodul $N \subseteq R^n$ existieren mit $M \cong R^n/N$.*

2.7.2. Lokalisierung von Moduln. Ist R ein Ring, M ein R-Modul und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, so kann man analog zur Lokalisierung von Ringen einen $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}M$ aller Brüche $\frac{m}{s}$, $m \in M$, $s \in S$, konstruieren. Wie im Fall von Ringen definiert man

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t \in S\colon t(s'm - sm') = 0.$$

In Analogie zu den Schreibweisen $R_\mathfrak{p}$, R_f schreiben wir auch $M_\mathfrak{p}$, M_f.

2.7.3. Das Lemma von Nakayama.

DEFINITION 2.77. Sind R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul, so sei

$$\mathfrak{a} \cdot M := \langle am;\ a \in \mathfrak{a}, m \in M \rangle_R.$$

Dann induziert die R-Modul-Struktur auf $M/\mathfrak{a}M$ in natürlicher Weise eine $R/\mathfrak{a}$-Modul-Struktur. ⊣

SATZ 2.78 (Lemma von Nakayama). *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ ein Ideal von R und sei M ein endlich erzeugter R-Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann gilt $M = 0$.*

BEWEIS. Wir nehmen an, M sei nicht der Nullmodul und beginnen mit der folgenden

Behauptung. Es gibt einen Untermodul $N \subset M$ und ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$, so dass $M/N \cong R/\mathfrak{m}$ gilt.

Begründung. Wir führen Induktion nach der minimalen Anzahl n von Elementen eines Erzeugendensystems von M. Wenn $n = 1$ ist, also M durch ein einziges Element erzeugt werden kann, dann gibt es einen surjektiven R-Modul-Homomorphismus $R \to M$, also ist nach dem Homomorphiesatz $M \cong R/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, das wegen $M \neq 0$ ungleich R sein muss. Also ist $\mathfrak{a}$ in einem maximalen Ideal von R enthalten (Satz 2.30), und daraus folgt die Behauptung, denn $R/\mathfrak{a}/\mathfrak{m}/\mathfrak{a} \cong R/\mathfrak{m}$.

Sei nun $n > 1$ und $m_1, \dots, m_n \in M$ ein Erzeugendensystem. Dann lässt sich $\overline{M} := M/\langle m_n \rangle_R$ durch die Restklassen von $m_1, \dots, m_{n-1}$ erzeugen, wir können also auf $\overline{M}$ die Induktionsvoraussetzung anwenden, und jeder Quotient von $\overline{M}$ ist isomorph zu einem Quotienten von M.

Aus der obigen Behauptung folgt nun leicht der Satz. In der Tat, wenn $\mathfrak{a}M = M$ gilt, dann folgt auch $\mathfrak{a}\overline{M} = \overline{M}$ für jeden Quotienten $\overline{M}$ von M. Aber aus $\mathfrak{a}(R/\mathfrak{m}) = R/\mathfrak{m}$ folgt $1 \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(R)$. □

Für zwei andere Möglichkeiten für den Beweis siehe [**AM**] Proposition 2.6.

KOROLLAR 2.79. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(R)$ ein Ideal von R und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist $N \subseteq M$ ein Untermodul mit $N + \mathfrak{a}M = M$, so gilt $N = M$.*

BEWEIS. Wir wenden das Lemma von Nakayama an auf den Quotienten $\overline{M} := M\,/\,N$. Mit M ist auch $\overline{M}$ endlich erzeugt und es gilt $\mathfrak{a}\overline{M} = \overline{M}$, denn jedes $m \in M$ lässt sich nach Voraussetzung als $m = n + m'$ mit $n \in N$, $m' \in \mathfrak{a}M$ schreiben, im Quotienten gilt also $m = m' \in \mathfrak{a}\overline{M}$. □

KOROLLAR 2.80. *Sei $(R, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist $M\,/\,\mathfrak{m}M$ in natürlicher Weise ein (endlich erzeugter) Vektorraum über dem Restklassenkörper k von R. Sind $x_1, \dots, x_n \in M$ Elemente, deren Restklassen in $M\,/\,\mathfrak{m}M$ ein Erzeugendensystem dieses k-Vektorraums bilden, so ist $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M.*

BEWEIS. Nach dem vorherigen Korollar genügt es zu zeigen, dass $\langle x_1, \dots, x_n\rangle_R + \mathfrak{m}M = M$ gilt, aber das ist klar nach Definition der x_i. □

DEFINITION 2.81. Sei R ein Ring, M ein R-Modul, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann heißt

$$M(\mathfrak{p}) := M_{\mathfrak{p}}\,/\,\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$$

die *Faser von M über* $\mathfrak{p}$. Dies ist ein Vektorraum über dem Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{p})$. ⊣

Wir können uns also einen R-Modul als eine (sehr spezielle) »Familie von Vektorräumen« vorstellen – für jeden Punkt aus $\operatorname{Spec} R$ haben wir einen Vektorraum über seinem Restklassenkörper.

SATZ 2.82. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ Primideale von R. Dann gilt $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M(\mathfrak{p}) \le \dim_{\kappa(\mathfrak{p}')} M(\mathfrak{p}')$.*

BEWEISSKIZZE. Indem wir zur Lokalisierung von R bezüglich $\mathfrak{p}'$ übergehen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}'$ ist. (Hier muss man ein paar Sachen nachprüfen. Dass diese Schritte hier nicht aufgeschrieben sind, ist der Grund, warum hier »Beweisskizze« steht.)

Im Fall, dass R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}'$ ist, können wir eine Basis von $M(\mathfrak{p}')$ über $\kappa(\mathfrak{p}')$ liften und erhalten ein Erzeugendensystem von M, das aus $\dim_{\kappa(\mathfrak{p}')} M(\mathfrak{p}')$ Elementen besteht. Die Restklassen dieser Elemente liefern uns dann ein Erzeugendensystem von $M\,/\,\mathfrak{p}M$ als $R\,/\,\mathfrak{p}$-Modul. Daraus erhalten wir ein Erzeugendensystem von $M(\mathfrak{p})$ als $\kappa(\mathfrak{p})$-vektorraum. Daraus folgt die Behauptung. □

Es ist auch nicht schwer, andersherum das Lemma von Nakayama als Folgerung von Satz 2.82 zu beweisen.

SATZ 2.83. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Betrachte die Eigenschaften*

(i) $M = 0$.

(ii) *Für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ *gilt* $M_{\mathfrak{p}} = 0$.

(iii) *Für alle* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ *gilt* $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

(iv) *Für alle* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ *gilt* $M(\mathfrak{m}) = 0$.

Dann sind (i), (ii), (iii) äquivalent und implizieren (iv). Ist M endlich erzeugt über R, so sind alle vier Eigenschaften äquivalent.

BEWEIS. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) sind klar. Ist M endlich erzeugt, dann folgt (iv) $\Rightarrow$ (iii) aus dem Lemma von Nakayama. Es bleibt also noch (iii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen. Sei dazu $M \neq 0$, sagen wir $m \in M \setminus \{0\}$. Die Abbildung $R \to M$, $a \mapsto am$ faktorisiert über einen injektiven R-Modul-Homomorphismus $R/\mathfrak{a} \to M$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$. Mit anderen Worten: Das Ideal

$$\mathfrak{a} = \{a \in R;\ am = 0\}$$

ist der sogenannte Annihilator von m. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, das $\mathfrak{a}$ enthält. Wäre $\frac{m}{1} = 0 \in M_\mathfrak{m}$, dann gäbe es $s \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $sm = 0$, ein Widerspruch. Also ist die Lokalisierung $M_\mathfrak{m}$ nicht der Nullmodul. □

BEMERKUNG 2.84. Die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (iii) gilt (im allgemeinen) nicht, wenn man die Voraussetzung, dass M endlich erzeugt sei, fallenlasse. Ein Beispiel ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (Überlegen Sie sich, warum …) ◊

BEMERKUNG 2.85. Manchmal ist die folgende etwas allgemeinere Version des Lemmas von Nakayama nützlich. Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein Element $a \in \mathfrak{a}$, so dass $am = m$ für alle $m \in M$ gilt. (Überlegen Sie sich, dass daraus die Version von Satz 2.78 folgt.) Die andere Implikation ist ein bisschen aufwändiger; vielleicht als Hausaufgabe.

◊

Literaturverweise zum Begriff *Modul*: **[AM]** Ch. 2, 3, **[M2]** §2

2.8. Tensorprodukte

Sei R ein Ring.

DEFINITION 2.86. Gegeben seien R-Moduln M und N. Ein R-Modul T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\beta\colon M \times N \to T$ heißt *Tensorprodukt von M und N über R*, falls für jeden R-Modul P und jede bilineare Abbildung $b\colon M \times N \to P$ genau ein R-Modulhomomorphismus $\psi\colon T \to P$ existiert, so dass $\psi \circ \beta = b$. ⊣

SATZ 2.87. *Seien M, N Moduln über R. Dann existiert ein Tensorprodukt von M und N über R, und es ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

BEWEIS. Die Eindeutigkeit folgt in der üblichen Weise aus der universellen Eigenschaft. Für die Konstruktion betrachten wir den »riesigen« freien R-Modul $R^{(M\times N)}$, dessen Standardbasis durch die Elemente $e_{(m,n)}$, $(m,n) \in M \times N$, gegeben ist.

Die Idee der folgenden Konstruktion ist die folgende: Sei $M \times N \to R^{(M\times N)}$ die Abbildung $(m,n) \mapsto e_{(m,n)}$. (Diese Abbildung ist weder linear noch bilinear.) Wir werden zu einem Quotienten von $R^{(M\times N)}$ übergehen, so dass die Abbildung, die wir durch Verkettung mit der kanonischen Projektion erhalten, bilinear ist, und zwar so, dass wir einen möglichst kleinen Untermodul herausteilen. Es folgt dann leicht, dass dieser Quotient und diese bilineare Abbildung die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts erfüllen.

Sei $W \subseteq R^{(M\times N)}$ der Untermodul, der von allen Elementen der folgenden Form erzeugt wird:

$$\begin{aligned}
&e_{(m+m',n)} - (e_{(m,n)} + e_{(m',n)}),\\
&e_{(am,n)} - ae_{(m,n)},\\
&e_{(m,n+n')} - (e_{(m,n)} + e_{(m,n')}),\\
&e_{(m,an)} - ae_{(m,n)},
\end{aligned}$$

wobei m, n bzw. a alle Elemente von M, N bzw. R durchlaufen. Sei T der Quotient $(R^{(M\times N)})\,/\,W$. Dann ist die Abbildung $\beta\colon M\times N \to T$, die (m,n) auf die Restklasse von $e_{(m,n)}$ abbildet, bilinear.

Sei nun $b\colon M \times N \to P$ irgendeine bilineare Abbildung. Dann faktorisiert die eindeutig bestimmte Abbildung $R^{(M\times N)} \to P$ mit $e_{(m,n)} \mapsto b(m,n)$ über einen Homomorphismus $\psi\colon T \to P$. Dieser bildet $\beta(m,n)$ ab auf $b(m,n)$, es gilt also $\psi \circ \beta = b$. Weil T von den $\beta(m,n)$ erzeugt wird, ist klar, dass ψ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Also ist T zusammen mit β ein Tensorprodukt von M und N über R. □

Wir bezeichnen das Tensorprodukt von M und N über R mit $M \otimes_R N$, und das Bild von $(x,y) \in M \times N$ in $M \otimes_R N$ mit $x \otimes y$. Elemente der Form $x \otimes y$ nennen wir *Elementartensoren*. In der Regel ist nicht jedes Element von $M \otimes_R N$ ein Elementartensor! Nach Definition (d.h., weil β bilinear ist) gelten für Elementartensoren die folgenden Rechenregeln:

$$(ax + a'x') \otimes y = a(x \otimes y) + a'(x' \otimes y), \tag{1}$$

$$x \otimes (ay + ay') = a(x \otimes y) + a'(x \otimes y'), \tag{2}$$

für $x, x' \in M, y, y' \in N, a, a' \in R$.

Beispiel 2.88. Ist K ein Körper und sind V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, so haben wir Identifikationen

$$\mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, K) = \mathrm{Bil}(V \times W, K) = \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee),$$

also ist $V \otimes_K W = \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee)^\vee$.

Speziell können wir $K^m \otimes_K K^n$ mit $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ identifizieren. ◊

Bemerkung 2.89. Seien R ein Ring und seien M, N Moduln über R.

(1) Jedes Element von $M \otimes_R N$ ist eine endliche Summe von Elementen der Form $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$. (Das folgt unmittelbar aus unserer Konstruktion. Man kann es aber auch aus der universellen Eigenschaft folgern, vergleiche Lemma LA2.18.41.)

(2) Seien $(x_i)_i$ ein Erzeugendensystem von M und $(y_i)_i$ ein Erzeugendensystem von N. Dann ist $(x_i \otimes y_j)_{i,j}$ ein Erzeugendensystem von $M \otimes_R N$. Das folgt leicht aus den obigen Rechenregeln für Elementartensoren und dem vorherigen Punkt.

(3) Wir haben kanonische Isomorphismen $R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M$, $r \otimes m \mapsto rm$ und $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$, $m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

(4) Das Tensorprodukt ist »funktoriell« im folgenden Sinne: Sind $\varphi\colon M \to M'$ und $\psi\colon N \to N'$ Modulhomomorphismen, so erhalten wir einen R-Modul-Homomorphismus

$$\varphi \otimes \psi\colon M \otimes_R N \to M' \otimes_R N', \quad m \otimes n \mapsto m' \otimes n'.$$

Diese Konstruktion ist verträglich mit der Verkettung von Abbildungen. *Achtung:* Selbst wenn φ und ψ injektiv sind, ist die Abbildung $\varphi \otimes \psi$ im allgemeinen nicht injektiv! Dieses Phänomen werden wir später (unter dem Stichwort *Flachheit*) noch ausführlicher untersuchen.

◊

Satz 2.90. *Seien M und N Moduln über R. Seien $x_i \in M, y_i \in N$, $i = 1, \dots, n$, mit*

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0 \quad \text{in } M \otimes_R N.$$

Dann existieren endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subseteq M$, $N_0 \subseteq N$, so dass $x_i \in M_0$, $y_i \in N_0$ für alle i und so dass

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0 \quad \text{in } M_0 \otimes_R N_0.$$

Beweis. Wir benutzen an dieser Stelle noch einmal die Konstruktion des Tensorprodukts. (Man kann den Satz auch aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts herleiten, ohne die Konstruktion zu benutzen, aber mit unserem jetzigen Kenntnisstand wäre das etwas lästiger. »Später«, aber vielleicht nicht in dieser Vorlesung, folgt die Aussage daraus, dass Tensorprodukte mit Kolimiten vertauschen.)

Wir benutzen die Notation aus dem Beweis von Satz 2.87. Die Voraussetzung besagt, dass $\sum_{i=1}^n e_{(x_i,y_i)}$ in dem Untermodul W von $R^{(M\times N)}$ liegt, also als endliche Linearkombination mit Koeffizienten in R von Elementen des dort angegebenen Erzeugendensystems von W ausgedrückt werden kann. In diesen endlich vielen Elementen kommen (in den Indizes) jeweils nur endlich viele Elemente von M und von N vor. Wir können dann für M_0 bzw. N_0 den Untermodul von M bzw. N wählen, der von den x_i (bzw. y_i) und allen in der besagten Linearkombination auftretenden Elementen erzeugt wird. Genau dieselbe Linearkombination liegt dann auch in dem analog gebildeten Untermodul $W_0 \subseteq R^{(M_0\times N_0)}$, für den $R^{(M_0\times N_0)}/W_0$ ein Tensorprodukt von M_0 und N_0 bildet. Also liegt $\sum_{i=1}^n e_{(x_i,y_i)}$ in W_0. □

Bemerkung 2.91. Analog zum obigen Fall kann man für multilineare (anstelle von bilinearen) Abbildungen vorgehen. Man erhält dann Tensorprodukte $M_1 \otimes_R M_2 \otimes \cdots \otimes_R M_n$. Man hat natürliche Identifikationen

$$M \otimes_R N \otimes_R P = (M \otimes_R N) \otimes_R P = M \otimes_R (N \otimes_R P),$$

und entsprechend für mehr als 3 Faktoren. ◇

Bemerkung 2.92. Seien A, B Ringe, sei M ein A-Modul, P ein B-Modul, und sei N ein (A,B)-Bimodul, d.h. es sei N ein A-Modul und gleichzeitig ein B-Modul, so dass $(ax)b = a(xb)$ für alle $a \in A$, $b \in B$, $x \in N$. Wir schreiben hier die Skalarmultiplikation mit Elementen von B als Multiplikation von rechts.

Dann ist $M \otimes_A N$ ein B-Modul (»von rechts«), und $N \otimes_B P$ ein A-Modul (»von links«), und

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P = M \otimes_A (N \otimes_B P), \quad m \otimes n \otimes p \mapsto m \otimes n \otimes p$$

ist ein Isomorphismus von (A,B)-Bimoduln, mit dem wir stets die beiden Seiten identifizieren. ◇

Satz 2.93. *Seien M, N, P Moduln über dem Ring R. Die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Hom}(M \otimes_R N, P) \to \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,P)), \quad \varphi \mapsto (m \mapsto (n \mapsto \varphi(m \otimes n))),$$

ist ein Isomorphismus von R-Moduln.

Beweis. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\psi \mapsto (m \times n \mapsto \psi(m)(n)),$$

wobei wie üblich die Abbildung $M \otimes_R N \to P$ auf der rechten Seite nur auf den Elementartensoren angegeben ist. Weil der Ausdruck $\psi(m)(n)$ in m und n bilinear ist, erhalten wir eine eindeutig bestimmte solche Abbildung auf ganz $M \otimes_R N$. Man überprüft dann, dass die beiden Abbildungen invers zueinander sind. □

2.8.1. Basiswechsel. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und M ein A-Modul. Dann wird der A-Modul $B \otimes_A M$ durch die (wohldefinierte!) Skalarmultiplikation

$$B \times (B \otimes_A M) \to B \otimes_A M, \quad (b, b' \otimes m) \mapsto (bb') \otimes m$$

zu einem B-Modul. Wir sagen, der B-Modul $B \otimes_A M$ entstehe aus M durch *Basiswechsel mit φ*.

Der Basiswechsel hat die folgende universelle Eigenschaft: Für alle B-Moduln N ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N), \quad \xi \mapsto (m \mapsto \xi(m \otimes 1)),$$

bijektiv mit Umkehrabbildung $\psi \mapsto (b \otimes m \mapsto b\psi(m))$. (Hier wird auf der rechten Seite N als A-Modul via φ aufgefasst, also $a \cdot n := \varphi(a)n$, vgl. Bemerkung 2.96.

BEISPIEL 2.94. (1) Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, $\varphi\colon R \to S^{-1}$ der natürliche Homomorphismus und M ein R-Modul. Dann ist

$$S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M, \quad \frac{x}{s} \otimes m \mapsto \frac{xm}{s}$$

ein Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln (mit Umkehrabbildung $\frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s} \otimes m$).

(2) Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Sei $\varphi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R M \to M/\mathfrak{a}M, \quad \overline{x} \otimes m \mapsto \overline{xm}$$

ein Isomorphismus von $R/\mathfrak{a}$-Moduln (mit Umkehrabbildung $\overline{m} \mapsto 1 \otimes m$). Dies folgt auch ohne explizite Rechnung daraus, dass der Quotient $M/\mathfrak{a}M$ die universelle Eigenschaft des Basiswechsels $R/\mathfrak{a} \otimes_R M$ erfüllt.

(3) Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal. Sei M ein R-Modul. Dann gilt

$$M(\mathfrak{p}) = M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}).$$

◊

BEISPIEL 2.95. Seien R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Aus den obigen Rechenregeln folgt insbesondere

$$(M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}.$$

und

$$(M \otimes_R N)(\mathfrak{p}) = M(\mathfrak{p}) \otimes_{\kappa(\mathfrak{p})} N(\mathfrak{p}).$$

◊

BEMERKUNG 2.96. Ist andererseits $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und N ein B-Modul, so kann man M als A-Modul auffassen durch die Skalarmultiplikation $a \cdot m := \varphi(a)m$. Wir bezeichnen den so erhaltenen A-Modul in der Regel wieder mit M. ◊

2.8.2. Tensorprodukt von Algebren. Seien R ein Ring und A, B Algebren über R. Dann wird $A \otimes_R B$ mit der (wohldefinierten!) Multiplikation

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$$

zu einem Ring, und vermöge des Ringhomomorphismus $R \to A \otimes_R B, x \mapsto x \otimes 1 (= 1 \otimes x)$ zu einer R-Algebra. Mit den Ringhomomorphismen $\alpha : A \to A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1$ bzw. $\beta : B \to A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b$ können wir $A \otimes_R B$ auch als A-Algebra bzw. als B-Algebra auffassen.

SATZ 2.97 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts von Algebren). *Seien R ein Ring und seien A, B Algebren über R.*

Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

von Ringhomomorphismen, und für jeden Ring T zusammen mit Ringhomomorphismen $f : A \to T$, $g : B \to T$ mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $h : A \otimes_R B \to T$, so dass $f = h \circ \alpha, g = h \circ \beta$.

Mit den obigen Notationen ist $h(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$.

Beweis. Jedenfalls muss $h(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$ gelten, damit $f = h \circ \alpha$ und $g = h \circ \beta$ sein kann. Weil der Ausdruck $f(a)g(b)$ bilinear in a und b ist, existiert jedenfalls ein eindeutig bestimmter R-Modul-Homomorphismus $A \otimes_R B \to T$ mit $h(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Dass $f = h \circ \alpha$ und $g = h \circ \beta$ gilt, ist auf Elementartensoren klar nach Definition, und folgt dann allgemein, weil sich jedes Element als Summe von Elementartensoren schreiben lässt. Schließlich zeigt man, dass h ein Ringhomomorphismus ist; wieder genügt es (warum?) für die Multiplikativität zu überprüfen, dass sich h multiplikativ auf Elementartensoren verhält, und das ist offensichtlich. □

Bemerkung 2.98 (Umformulierung der universellen Eigenschaft). Seien R-Algebren A und B gegeben. Dann sind die Abbildungen $\alpha\colon A \to A \otimes_R B$, $a \mapsto a \otimes 1$, und $\beta\colon B \to A \otimes_R B$, $b \mapsto 1 \otimes b$, Homomorphismen von R-Algebren.

Für jede R-Algebra C und R-Algebren-Homomorphismen $f\colon A \to C$, $g\colon B \to C$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $h\colon A \otimes_R B \to C$ von R-Algebren, so dass $h \circ \alpha = f$, $h \circ \beta = g$.

Mit anderen Worten: Das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ (zusammen mit den Abbildungen α β) erfüllt die universelle Eigenschaft des Koprodukts in der Kategorie der R-Algebren, siehe Definition 3.3. ◊

Bemerkung 2.99. In dieser Bemerkung sind die Gleichheitszeichen so zu verstehen, dass behauptet wird, dass die natürliche Abbildung zwischen den beiden Seiten ein Isomorphismus ist.

(1) Ist B eine A-Algebra und ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so gilt $(A / \mathfrak{a}) \otimes_A B = B / \mathfrak{a}B$.
(2) Ist B eine A-Algebra und ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so gilt $S^{-1}A \otimes_A B = S^{-1}B$.
(3) Ist B eine A-Algebra, so gilt $A[X] \otimes_A B = B[X]$.

◊

Zum Thema Tensorprodukte siehe auch [**AM**] Ch. 2, [**M2**] App. A und für den (einfacheren) Fall von Vektorräumen Abschnitt LA2.18.5.

KAPITEL 3

Funktoren und exakte Sequenzen

3.1. Kategorien und Funktoren

Die Idee hinter dem Begriff einer Kategorie ist es, dass es sehr oft sinnvoll ist, zu einer Art von mathematischem Objekt (Vektorraum, Gruppe, Ring, topologischer Raum, ...) auch festzulegen, welche Art von Abbildungen man typischerweise zwischen solchen Objekten betrachtet (lineare Abbildungen, Gruppenhomomorphismen, Ringhomomorphismen, stetige Abbildungen, ...). Die Definition ist allerdings so flexibel, dass sie auch in allgemeineren Situationen verwendet werden kann (und sich als nützlich erweist).

Unter einer *Klasse* verstehen wir eine »Zusammenfassung von mathematischen Objekten«, also mehr oder weniger dasselbe wie eine *Menge*, allerdings ist der Klassenbegriff allgemeiner, weil (formal gesehen) Mengen nur durch die im zugrundeliegenden Axiomensystem erlaubten Operationen gebildet werden können. Es gibt zum Beispiel nicht die »Menge aller Mengen«. Für Klassen bestehen diese Restriktionen nicht; man kann beispielsweise von der Klasse aller Mengen sprechen. Um hiervon wirklich sauber sprechen zu können, müsste man natürlich genauer die Axiome der Mengenlehre festlegen und untersuchen, die zugrundegelegt werden sollen. Wir bleiben stattdessen bei der hier angedeuteten naiven Sichtweise.

DEFINITION 3.1. Eine *Kategorie* $\mathscr{C}$ ist gegeben durch

(1) eine Klasse $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ von *Objekten*
(2) für je zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ eine Klasse $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* von X nach Y
(3) für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ eine Abbildung (*Verkettung von Morphismen*)
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$
(4) für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ein Element $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ (*Identitätsmorphismus*),

so dass

(a) $f \circ \mathrm{id}_X = f$, $\mathrm{id}_X \circ g = g$ für alle f, g, für die die Verkettung existiert,
(b) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, für alle f, g, h, für die diese Verkettungen existieren.

Wir verstehen diese Definition so, dass die Mengen $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', Y')$ disjunkt sind, wenn $X \neq X'$ oder $Y \neq Y'$ ist. ⊣

BEISPIEL 3.2. (1) Die Kategorie (Set) der Mengen: Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen zwischen Mengen.
(2) Die Kategorie (Group) der Gruppen: Objekte sind Gruppen, Morphismen sind Gruppenhomomorphismen. Entsprechend: Die Kategorie (AbGroup) der abelschen Gruppen.
(3) Sei R ein Ring. Die Kategorie (R- Mod) der R-Moduln hat als Objekte die R-Moduln, als Morphismen die R-Modul-Homomorphismen. Die Kategorie (R- Alg) der R-Algebren hat als Objekte die R-Algebren, als Morphismen die R-Algebra-Homomorphismen.
(4) Die Kategorie der topologischen Räume: Objekte sind topologische Räume, Morphismen sind stetige Abbildungen.

(5) Sei G eine Gruppe. Wir können eine Kategorie $\mathscr{C}$ definieren, die ein einziges Objekt X hat, und so dass $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X) = G$. Die Verkettung von Morphismen sei durch die Multiplikation in G gegeben, id_X sei das neutrale Element von G.

(6) Als weiteres Beispiel betrachten wir die Kategorie $\mathscr{C}$, deren Objekte alle Mengen sind, und so dass für Mengen X, Y die Menge der Morphismen definiert sei als

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) = \{\Gamma \subseteq X \times Y \text{ Teilmenge}\}.$$

Die Verknüpfung sei folgendermaßen gegeben: Für $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ setze

$$g \circ f = \{(x,y) \in X \times Z;\ \exists y \in Y : (x,y) \in f, (y,z) \in g\} \in \mathrm{Hom}(X,Z).$$

In diesem Fall sind also die Morphismen keine Abbildungen (die noch zusätzliche Bedingungen erfüllen), sondern »andersartige« Objekte (in diesem Beispiel konkret alle Relationen zwischen X und Y). Die Kategorienaxiome sind aber erfüllt, wie man leicht nachprüft. Es gilt $\mathrm{id}_X = \{(x,x); x \in X\}$.

$\Diamond$

Definition 3.3 (Kategorielle Sprechweisen). Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, $X, Y, \dots \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

(1) Die Elemente von $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ heißen *Endomorphismen* von X. Man schreibt auch $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$.

(2) Ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ heißt *Isomorphismus*, falls ein Morphismus $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dann ist g eindeutig bestimmt, und heißt der Umkehrmorphismus zu f.

(3) Ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ heißt *Monomorphismus*, falls für alle Z und alle $g, g' \in \mathrm{Hom}(Z,X)$ mit $f \circ g = f \circ g'$ gilt: $g = g'$.

(4) Ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ heißt *Epimorphismus*, falls für alle Z und alle $g, g' \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ mit $g \circ f = g' \circ f$ gilt: $g = g'$.

(5) Ein Objekt P von $\mathscr{C}$ zusammen mit Abbildungen $p\colon P \to X$, $q\colon P \to Y$ heißt *Produkt von X und Y in $\mathscr{C}$*, falls für alle Objekte T zusammen mit Abbildungen $p'\colon T \to X$, $q'\colon T \to Y$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $f\colon T \to P$ in $\mathscr{C}$ existiert, so dass $p' = p \circ f$, $q' = q \circ g$. Das Produkt ist, sofern es existiert, eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir bezeichnen es mit $X \times Y$, und bezeichnen die Abbildungen p, q als die Projektionen auf X bzw. Y.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "p'"] \arrow[ddr, bend right, "q'"'] & & \\
& P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Entsprechend kann man das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ definieren.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "p'_j"'] & & \prod_{i\in I} X_i \arrow[dl, "p_j"] \\
& X_j. &
\end{tikzcd}$$

(6) Ein Objekt K von $\mathscr{C}$ zusammen mit Abbildungen $p\colon X \to K$, $q\colon Y \to K$ heißt *Koprodukt von X und Y in $\mathscr{C}$*, falls für alle Objekte T zusammen mit Abbildungen $p'\colon X \to T$, $q'\colon Y \to T$

ein eindeutig bestimmter Morphismus $f\colon K \to T$ in $\mathscr{C}$ existiert, so dass $p' = f \circ p$, $q' = g \circ q$. Das Koprodukt ist, sofern es existiert, eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir bezeichnen es mit $X \coprod Y$.

$$\begin{tikzcd}
T & & \\
& K \arrow[ul, dashed, "f"'] & X \arrow[l, "p"] \arrow[ull, bend right, "p'"'] \\
& Y \arrow[u, "q"] \arrow[uul, bend left, "q'"] &
\end{tikzcd}$$

Entsprechend kann man das Koprodukt $\coprod_{i\in I} X_i$ definieren.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} V_i \arrow[rr, dashed, "f"] & & W \\
& V_j . \arrow[ul, "p_j"] \arrow[ur, "p'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

⊣

Objekte X, Y einer Kategorie $\mathscr{C}$ heißen ***isomorph***, wenn ein Isomorphismus $X \to Y$ existiert. Wir schreiben dann $X \cong Y$. Für Morphismen, die Isomorphismen sind, schreibt man manchmal auch $\xrightarrow{\sim}$ statt $\to$.

BEMERKUNG 3.4. (1) Jeder Isomorphismus ist ein Monomorphismus und ein Epimorphismus. (Aber es gibt Kategorien, in denen Morphismen existieren, die Mono- und Epimorphismen sind, aber keine Isomorphismen!)

(2) Der Begriff des Koprodukts entsteht aus dem des Produkts durch »Umkehren alle Pfeile«.

◊

BEISPIEL 3.5. (1) Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie der Mengen, der abelschen Gruppen oder allgemeiner der Moduln über einem Ring R. Dann ist eine Abbildung genau dann ein Isomorphismus, wenn sie bijektiv ist; genau dann ein Monomorphismus, wenn sie injektiv ist; genau dann ein Epimorphismus, wenn sie surjektiv ist.

(2) Punkt (1) ist auch richtig für die Kategorie der Gruppen, es ist aber nicht so leicht zu zeigen, dass jeder Epimorphismus surjektiv ist.

(3) Der Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist ein Epimorphismus in der Kategorie der Ringe, der nicht surjektiv ist. Zugleich ist er ein Monomorphismus, also ein Mono- und Epimorphismus, aber kein Isomorphismus.

(4) In der Kategorie der topologischen Räume gibt es Morphismen, die keine Isomorphismen, aber bijektive Abbildungen sind, siehe Beispiel 2.22, Bemerkung 2.21.

◊

BEISPIEL 3.6. (1) In der Kategorie der Mengen existieren Produkte und Koprodukte für beliebige Indexmengen. Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist das übliche kartesische Produkt. Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist die disjunkte Vereinigung.

(2) Sei R ein Ring. In der Kategorie der R-Moduln existieren Produkte und Koprodukte für beliebige Indexmengen; siehe Definition 2.74.

(3) Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie der Körper (Objekte sind alle Körper, Morphismen sind Ringhomomorphismen). Seien k, k' Körper unterschiedlicher Charakteristik. Dann existieren weder das Produkt von k und k' noch das Koprodukt von k und k' in $\mathscr{C}$ (denn es gibt keinen Körper, der Homomorphismen sowohl nach k als auch nach k' zulässt, und keinen Körper der Homomorphismen sowohl von k als auch von k' zulässt).

(4) Sei K ein Körper. In der Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume (Objekte sind alle endlich-dimensionalen K-Vektorräume, Morphismen sind lineare Abbildungen) existieren Produkte für endliche Indexmengen, jedoch (außer in trivialen Fällen) nicht für unendliche Indexmengen.

$\diamondsuit$

3.1.1. Funktoren. Ein zentraler Begriff der Kategorientheorie ist der des *Funktors*. Das ist sozusagen eine Abbildung zwischen zwei Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$, die einerseits jedem Objekt von $\mathscr{C}$ ein Objekt von $\mathscr{D}$ zuordnet, aber auch jedem Morphismus in $\mathscr{C}$ einen Morphismus in $\mathscr{D}$, so dass die »offensichtlichen« Verträglichkeiten erfüllt sind. Es gibt zwei Versionen des Funktorbegriffs (kovariant bzw. kontravariant), die beide nützlich sind.

Viele Konstruktionen in der Mathematik und speziell im Bereich der Algebra sind *funktoriell*, d.h. es handelt sich um Funktoren zwischen Kategorien. Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition eines Funktors ist, dass unter einem Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abgebildet werden. Funktorielle Konstruktionen erhalten also Isomorphismen. Ein konkretes Beispiel: Ist K ein Körper und sind V, W isomorphe K-Vektorräume, dann sind auch die Dualräume $V^\vee$ und $W^\vee$ isomorph.

DEFINITION 3.7. Seien $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ist gegeben durch

(1) für jedes $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$,
(2) für jedes $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ ein Morphismus $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$,

so dass

(a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$,
(b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ für alle Morphismen f, g von $\mathscr{C}$, so dass die Verkettung $f \circ g$ existiert.

Ein *kontravarianter Funktor* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ist gegeben durch

(1) für jedes $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$,
(2) für jedes $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ ein Morphismus $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(Y), F(X))$,

so dass

(a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$,
(b) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ für alle Morphismen f, g von $\mathscr{C}$, so dass die Verkettung $f \circ g$ existiert.

$\dashv$

BEMERKUNG 3.8. Aus der Notation $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, so wie sie in der Definition oben eingeführt wurde, geht nicht hervor, ob es sich um einen kovarianten oder kontravarianten Funktor handelt. Wenn nichts dazugesagt wird, ist in aller Regel ein kovarianter Funktor gemeint. Wenn man diesen Unterschied auch symbolisch ausdrücken will, kann man sich folgendermaßen behelfen.

Für eine Kategorie $\mathscr{C}$ sei $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ die Kategorie, die dieselben Objekte wie $\mathscr{C}$ hat, aber bei der bei allen Morphismen »die Richtung umgekehrt wird«, also $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ und entsprechend für die Verkettung. (Man nennt $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ die zu $\mathscr{C}$ *duale Kategorie* oder *entgegengesetzte Kategorie*, auf Englisch: *opposite category*.) Dann ist ein kontravarianter Funktor von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ dasselbe wie ein kovarianter Funktor $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$. Dann kann man also verabreden, mit dem Pfeil $\to$ immer kovariante Funktoren zu bezeichnen, und die Kontravarianz gegebenenfalls dadurch zu notieren, dass der eigentliche »Definitionsbereich« durch seine duale Kategorie ersetzt wird. ♢

BEMERKUNG 3.9. Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab: Ist F ein Funktor und $X \cong Y$, so gilt $F(X) \cong F(Y)$. ♢

Zu jeder Kategorie $\mathscr{C}$ haben wir den Identitäsfunktor $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, der jedes Objekt und jeden Morphismus auf sich selbst abbildet. Zu Funktoren $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ und $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ können wir in offensichtlicher Weise die *Verkettung* oder *Komposition* $G \circ F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$, die auf Objekten und auf Morphismen jeweils durch Verkettung der entsprechenden Abbildungen gegeben ist.

BEISPIEL 3.10. (1) (Vergissfunktoren) Wir haben offensichtliche Funktoren von der Kategorie der Moduln über einem Ring R in die Kategorie der abelschen Gruppen; von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Mengen; von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Mengen usw., die durch Vergessen eines Teils der Struktur (der Skalarmultiplikation; der Addition; der Topologie usw.) gegeben sind. Funktoren dieser Art heißen Vergissfunktoren.

(2) Sei K ein Körper. Der Funktor, der jeden K-Vektorraum auf seinen Dualraum und jede lineare Abbildung auf ihre duale Abbildung abbildet, ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der K-Vektorräume in sich selbst.

♢

Weitere Beispiele sehen wir weiter unten in diesem Abschnitt.

DEFINITION 3.11. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, und sei X ein Objekt von $\mathscr{C}$.

(1) Der Hom-*Funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \cdot)$ ist der kovariante Funktor von $\mathscr{C}$ in die Kategorie der Mengen, der auf Objekten durch
$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$$
und auf Morphismen durch
$$(f\colon Y \to Z) \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z),\ g \mapsto f \circ g)$$
definiert ist.

(2) Der Hom-*Funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, X)$ ist der kontravariante Funktor von $\mathscr{C}$ in die Kategorie der Mengen, der auf Objekten durch
$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$$
und auf Morphismen durch
$$(f\colon Y \to Z) \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X),\ g \mapsto g \circ f)$$
definiert ist.

(3) Ist $\mathscr{C} = (R\text{-Mod})$ die Kategorie der Moduln über einem Ring R, so erhält man auf diese Weise Funktoren von $(R\text{-Mod}) \to (R\text{-Mod})$.

⊣

3.1.2. Lokalisierung ist ein Funktor. Seien R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Wir definieren einen Funktor

$$F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (S^{-1}R\text{-}\mathrm{Mod})$$

durch $F(M) := S^{-1}M$, und indem wir einen Homomorphismus $f\colon M \to N$ auf

$$F(f)\colon S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$$

abbilden. Wir schreiben auch $S^{-1}f$ für $F(f)$.

3.1.3. Basiswechsel ist ein Funktor. Sei $R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Wir definieren den *Basiswechselfunktor*

$$(R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$$

auf Objekten durch $M \mapsto R' \otimes_R M$ und auf Morphismen durch $(f\colon M \to N) \mapsto \mathrm{id}_{R'} \otimes f$, mit

$$\mathrm{id}_{R'} \otimes f\colon R' \otimes_R M \to R' \otimes_R N, \quad x \otimes m \mapsto x \otimes f(m)$$

Der Lokalisierungsfunktor ist der Spezialfall dieses Funktors für den Ringhomomorphismus $R \to S^{-1}R$.

3.1.4. Spektrum eines Rings als Funktor. Jedem Ring R sein Primspektrum $\mathrm{Spec}(R)$ und jedem Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ die stetige Abbildung $\varphi^a\colon \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ zuzuordnen (Abschnitt 3.1.4) definiert einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der topologischen Räume.

Ergänzung LA2.18.8.1, [**GW**] App. A

Weitere Literatur zum Thema Kategorien:

Ein Klassiker ist das Buch [**Ma**] von MacLane (das im Grunde schon viel mehr Material enthält als viele »working mathematicians« überhaupt benötigen).

Das Buch [**Br**] von Brandenburg ist gut zugänglich und stellt an vielen Stellen die Verbindung von kategoriellen Konzepten zu verschiedenen anderen Gebieten der Mathematik her.

Eine weitere gute Einführung ist T. Leinster, *Basic category theory*, Cambridge University Press, 2014.
Eine Vorversion ist frei verfügbar unter `https://arxiv.org/pdf/1612.09375.pdf`.

Der Formalismus von Kategorien wird auch außerhalb der Mathematik benutzt, um »Strukturen zu beschreiben« bzw. »Daten zu organisieren«. Siehe zum Beispiel
Tai-Danae Bradley, What is applied category theory?,
`https://arxiv.org/pdf/1809.05923.pdf`
für einige Beispiele und weitere Referenzen.

3.2. Exakte Sequenzen

Sei R ein Ring. Eine *Sequenz* von R-Moduln ist eine Familie M_i, $i \in \mathbb{Z}$, zusammen mit R-Modul-Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

(analog für »Intervalle« in $\mathbb{Z}$ als Indexmengen).

Eine Sequenz heißt ein *Komplex*, falls $f_{i+1} \circ f_i = 0$ für alle i.

Eine Sequenz heißt *exakt an der Stelle i* (oder *bei* M_i), falls $\operatorname{Im} f_{i-1} = \operatorname{Ker} f_i$ gilt. Sie heißt *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine Sequenz, deren Indexmenge ein Intervall in $\mathbb{Z}$ ist, heißt exakt, wenn sie an allen Stellen exakt ist, bei denen sowohl eine Abbildung »ankommt« als auch eine Abbildung »beginnt«.

Beispiel 3.12. (1) Eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$

ist genau dann exakt (bei M'), wenn f injektiv ist.

(2) Eine Sequenz

$$M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt (bei M''), wenn f surjektiv ist.

◊

Definition 3.13. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz*. Die Exaktheit ist dazu äquivalent, dass f injektiv, g surjektiv, und dass $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ ist. ⊣

In der Situation der Definition induziert g einen Isomorphismus $M'' \cong M/M'$ (wobei wir M' vermöge der Injektion f als Untermodul von M auffassen). Ist andererseits $N \subseteq M$ ein Untermodul, so geben die Einbettung von N nach M und die kanonische Projektion auf den Quotienten Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0.$$

Satz 3.14. (1) *Sei*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine Sequenz von R-Moduln. Dann gilt: Die Sequenz ist genau dann exakt (bei M und M''), wenn für alle R-Moduln N die Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M'', N) \to \operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M', N)$$

(vergleiche Definition 3.11) exakt (an der zweiten und dritten Stelle) ist.

(2) *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

eine Sequenz von R-Moduln. Dann gilt: Die Sequenz ist genau dann exakt, wenn für alle R-Moduln N die Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(N, M') \to \operatorname{Hom}_R(N, M) \to \operatorname{Hom}_R(N, M'')$$

(vergleiche Definition 3.11) exakt ist.

Beweis. Die Behauptungen sind alle nicht sehr schwer zu zeigen, und es ist sicherlich nützlicher und vermutlich auch einfacher, sich die Beweise selbst zu überlegen, als sie nachzuarbeiten. Daher folgen hier nur einige Hinweise.

Zu zeigen, dass die Sequenzen, die durch Anwenden des Hom-Funktors entstehen, exakt sind, ist einfach. Dass jeweils »Im $\subseteq$ Ker« gilt, folgt unmittelbar daraus, dass der Hom-Funktor die Nullabbildung auf die Nullabbildung abbildet, denn diese Inklusion lässt sich umformulieren als die Aussage, dass die Verkettung der beiden Morphismen, die an diese Stelle aufeinanderstoßen, verschwindet. Die Exaktheit bei $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ in (1) folgt aus dem Homomorphiesatz.

Um zu zeigen, dass die Exaktheit der »Hom-Sequenz« für alle N die Exaktheit der Ursprungssequenz impliziert, braucht man in Teil (2) nur $N = R$ einzusetzen. Denn für jeden R-Modul M lässt sich $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ mit M identifizieren. In Teil (1) setze man $N = M''$ um zu sehen, dass $g \circ f = 0$ gelten muss, $N = M'' / \mathrm{Im}(g)$ um zu sehen, dass g surjektiv ist, und $N = M / \mathrm{Im}(f)$ um zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ gilt. □

Satz 3.15 (Schlangenlemma). *Sei R ein Ring und*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln, in dem die Zeilen exakte Sequenzen sind. Dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f' \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Ker} f \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Ker} f'' \xrightarrow{d}$$

$$N' / \mathrm{Im} f' \xrightarrow{\overline{u'}} N / \mathrm{Im} f \xrightarrow{\overline{v'}} N'' / \mathrm{Im} f'' \longrightarrow 0,$$

wobei $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u'}$, $\overline{v'}$ die von u, v, u', v' induzierten Abbildungen sind.

Beweis. Es gilt wieder die Bemerkung zu Beginn des Beweises des vorherigen Satzes.

Der Knackpunkt ist die Konstruktion der Abbildung d (die man manchmal als *Randabbildung*, englisch *boundary homomorphism*, bezeichnet; diese Bezeichnung kommt aus der algebraischen Topologie, wir gehen hier nicht näher darauf ein). Dafür geht man folgendermaßen vor: Sei $x \in \mathrm{Ker}(f'')$. Insbesondere liegt x in M'', es existiert mithin $y \in M$ mit $v(y) = x$. Dann gilt $v'(f(y)) = f''(v(y)) = f''(x) = 0$, also liegt $f(y)$ im Bild von u', etwa $u'(z) = f(y)$. Wir definieren $d(x)$ als das Bild von z unter der kanonischen Projektion $N' \to N' / \mathrm{Im}(f')$.

Hier sind nun einige Sachen zu überprüfen:

- Die Abbildung d ist wohldefiniert, d.h. $d(x)$ hängt nicht von der Wahl von y ab.
- Die Abbildung d ist ein R-Modul-Homomorphismus.
- Die resultierende Sequenz von R-Moduln wie in der Aussage ist exakt.

Die Beweistechnik, sich »durch ein kommutatives Diagramm zu hangeln«, bezeichnet man auch als *Diagrammjagd*, englisch *diagram chase*. Siehe auch die Episode `https://www.youtube.com/watch?v=etbcKWEKnvg` aus dem Kinofilm *It's my turn* (deutsch: *Ich nenn' es Liebe*), in der Jill Clayburgh, die die Mathematik-Professorin Kate Gunzinger spielt, das Schlangenlemma beweist. □

Für einen R-Modul-Homomorphismus $f\colon M \to N$ heißt der Quotient $N / \operatorname{Im} f$ auch der *Kokern von f* und wird mit $\operatorname{Coker} f$ bezeichnet. (Dies ist tatsächlich der duale Begriff zum Begriff des Kerns, vergleiche Definition 3.37.)

KOROLLAR 3.16 (Fünferlemma). *Wenn in der Situation des Schlangenlemmas zwei der drei Homomorphismen f', f, f'' Isomorphismen sind, so auch der dritte.*

Auf Englisch heißt das Fünferlemma *five lemma*.

BEWEIS. Ein R-Modul-Homomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sowohl sein Kern als auch sein Kokern verschwinden. Eine Sequenz $0 \to M \to 0$ ist genau dann exakt bei M, wenn $M = 0$ gilt. Daher folgt die Aussage unmittelbar aus dem Schlangenlemma. □

Literatur: [**AM**] Ch. 2

3.3. Exakte Funktoren

Seien R und R' Ringe. Für R-Moduln M, N trägt die Menge $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ durch die Gruppenstruktur auf N die Struktur einer abelschen Gruppe (und sogar, induziert durch die R-Modulstruktur auf N, die Struktur eines R-Moduls).

DEFINITION 3.17. Ein (kovarianter) Funktor $F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$ heißt *additiv*, falls für alle R-Moduln M, N die durch F gegebene Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{R'}(F(M), F(N))$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

Ein kontravarianter Funktor $F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$ heißt *additiv*, falls für alle R-Moduln M, N die durch F gegebene Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{R'}(F(N), F(M))$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist. ⊣

BEMERKUNG 3.18. Ist F ein additiver Funktor, so gilt $F(0) = 0$. ♢

DEFINITION 3.19. (1) Ein kovarianter Funktor $F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$ heißt *linksexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

die Sequenz

$$0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$$

exakt ist.

(2) Ein kontravarianter Funktor $F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$ heißt *linksexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

die Sequenz

$$0 \to F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1)$$

exakt ist.

(3) Ein kovarianter Funktor $F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$ heißt *rechtsexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz
$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$
die Sequenz
$$F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0$$
exakt ist. Analog: rechtsexakte kontravariante Funktoren.

(4) Ein kovarianter Funktor $F\colon (R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R'\text{-}\mathrm{Mod})$ heißt *exakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz
$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$
die Sequenz
$$0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0$$
exakt ist, d. h. wenn F linksexakt und rechtsexakt ist. Analog: exakte kontravariante Funktoren.

⊣

BEMERKUNG 3.20. (1) Sei F ein linksexakter kovarianter Funktor und sei $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3$ exakt. Dann ist $0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$ exakt. Analog für kontravariante Funktoren.

(2) Sei F ein rechtsexakter kovarianter Funktor und sei $M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ exakt. Dann ist $F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0$ exakt. Analog für kontravariante Funktoren.

(3) Sei F ein exakter kovarianter Funktor und sei $M_1 \to M_2 \to M_3$ exakt. Dann ist $F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$ exakt. Analog für kontravariante Funktoren.

◊

3.3.1. Der Hom-Funktor ist linksexakt.

Als Teil von Satz 3.14 haben wir schon die folgende Aussage bewiesen.

SATZ 3.21. *Seien R ein Ring und N ein R-Modul. Dann sind die Funktoren* $\mathrm{Hom}_R(\cdot, N)$ *und* $\mathrm{Hom}(N, \cdot)$ *linksexakt. (Vergleiche Definition 3.11 und Satz 3.14).*

3.3.2. Tensorprodukt ist rechtsexakt.

SATZ 3.22. *Seien R ein Ring und N ein R-Modul. Dann ist der Funktor $M \mapsto M \otimes_R N$ rechtsexakt.*

BEWEIS. Sei $M' \to M \to M'' \to 0$ exakt. Um zu zeigen, dass die mit N tensorierte Sequenz
$$M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$$
exakt ist, benügt es nach Satz 3.14 zu zeigen, dass für jeden R-Modul T die Sequenz
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'' \otimes_R N, T) \to \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, T) \to \mathrm{Hom}_R(M' \otimes_R N, T)$$
exakt ist. Weil wir $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, T)$ mit $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, T))$ identifizieren können (und entsprechend für M' und M'', siehe Satz 2.93), folgt dies aus Satz 3.14, angewandt auf die Ursprungssequenz (und $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_R(N, T))$).

Wir haben hier die Aussage, dass der Funktor *Tensorprodukt* rechtsexakt ist, im wesentlichen durch ein formales Argument aus Satz 2.93 erhalten. Das ist insofern die »richtige« Sichtweise, als derselbe Beweis zeigt, dass jeder Funktor $(R\text{-}\mathrm{Mod}) \to (R\text{-}\mathrm{Mod})$, der einen »rechtsadjungierten Funktor besitzt«, rechtsexakt ist. (Satz 2.93 besagt, dass der Funktor $- \otimes_R N$ als rechtsadjungierten Funktor den Funktor $\mathrm{Hom}(N, -)$ besitzt; wir gehen aber an dieser Stelle auf den Begriff adjungierter Funktoren nicht weiter ein.) Alternativ könnte man für diesen Satz auch »direkter« argumentieren, zum Beispiel ist praktisch offensichtlich, dass Tensorieren Surjektivität erhält. □

3.3.3. Flache Moduln.

DEFINITION 3.23. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt *flach*, wenn der Funktor $N \mapsto M \otimes_R N$ exakt ist. $\dashv$

Weil Tensorieren stets rechtsexakt ist, ist ein R-Modul M genau dann flach, wenn für jeden injektiven Homomorphismus $\varphi\colon N' \to N$ von R-Moduln auch der Homomorphismus $\mathrm{id}_M \otimes \varphi\colon M \otimes_R N' \to M \otimes_R N$ injektiv ist.

BEISPIEL 3.24. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Dann ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n$ nicht flach. $\lozenge$

LEMMA 3.25. *Seien R ein Ring, N ein R-Modul und M_i, $i \in I$ eine Familie von R-Moduln. Der natürliche R-Modul-Homomorphismus*

$$\left(\bigoplus_i M_i\right) \otimes_R N \to \bigoplus_i (M_i \otimes_R N), \qquad (m_i)_i \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_i,$$

ist ein Isomorphismus.

SATZ 3.26. *Ist R ein Ring und M ein freier R-Modul, so ist M flach.*

Insbesondere folgt aus dem Satz: Ist K ein Körper, so ist jeder K-Vektorraum flach.

Eine R-Algebra A heißt flach, wenn A als R-Modul flach ist.

BEISPIEL 3.27. Sei k ein Körper und sei $R = k[T]$ der Polynomring in einer Variablen T über k.

(1) Die R-Algebren $R[X]/(X-T)$ und $R[X]/(X^2-T)$ sind flach (sie sind sogar freie R-Moduln).
(2) Die R-Algebra $R[X]/(XT-1)$ ist flach (aber kein freier R-Modul).
(3) Die R-Algebra $R[X]/(XT)$ ist nicht flach.

$\lozenge$

3.3.4. Lokalisierung ist exakt.

SATZ 3.28. *Seien R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Dann ist der Funktor $M \mapsto S^{-1}M$ exakt.*

BEWEIS. Diese Aussage ist leicht zu überprüfen. Sei dazu die Sequenz

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

exakt bei M. Dann gilt $g \circ f = 0$, und da Lokalisierung verträglich mit Verkettung ist, folgt die analoge Aussage nach Lokalisierung. Das bedeutet $\mathrm{Im}(S^{-1}f) \subseteq \mathrm{Ker}(S^{-1}g)$.

Sei nun $\frac{m}{s} \in \mathrm{Ker}(S^{-1}g)$ mit $m \in M$, $s \in S$. Dann gilt $\frac{g(m)}{s} = 0$ in M'', also existiert $t \in S$ mit $g(tm) = tg(m) = 0$. Das bedeutet $tm \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, etwa $f(m') = tm$. Aber dann ist $\frac{m}{s} = \frac{tm}{st} = \frac{f(m')}{st} \in \mathrm{Im}(S^{-1}f)$. $\square$

Angesichts der Identifikation $S^{-1}M = M \otimes_R S^{-1}R$ können wir den Satz auch so formulieren, dass $S^{-1}R$ eine flache R-Algebra ist.

KOROLLAR 3.29. *Sei R ein Ring, und sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge.*

(1) *Ist $N \subseteq M$ eine Inklusion von R-Moduln, so ist $S^{-1}N \subseteq S^{-1}M$ und $S^{-1}M / S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.*

(2) *Sei $f: M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus und $S^{-1}f: S^{-1}M \to S^{-1}N$ der auf den Lokalisierungen induzierte Homomorphismus. Dann gilt $S^{-1}\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(S^{-1}f)$, $S^{-1}\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(S^{-1}f)$ und $S^{-1}N / S^{-1}\operatorname{Im}(f) = S^{-1}(N/\operatorname{Im}(f))$.*

Beweis. Teil (1) ist eine direkte Konsequenz dessen, dass Lokalisierung ein exakter Funktor ist, wie wir gerade gezeigt haben. Dasselbe gilt in Teil (2) für die Verträglichkeit mit Kern und dem Kokern $N/\operatorname{Im}(f)$; man betrachte die exakte Sequenz $0 \to \operatorname{Ker}(f) \to M \to N \to N/\operatorname{Im}(f) \to 0$. Indem wir $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(N \to N/\operatorname{Im}(f))$ schreiben, folgt dann auch die Verträglichkeit mit der Bildung des Bilds. □

Satz 3.30. *Sei R ein Ring, $f: M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(i) $f = 0$

(ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist $f \otimes \mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}}: M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ die Nullabbildung.*

(iii) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist $f \otimes \mathrm{id}_{R_\mathfrak{m}}: M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ die Nullabbildung.*

Beweis. Dass ein R-Modul-Homomorphismus $f: M \to N$ die Nullabbildung ist, ist äquivalent zu $M/\operatorname{Ker}(f) = 0$. Damit folgt der Satz aus Korollar 3.29 und Satz 2.83. □

Satz 3.31. *Sei R ein Ring, und sei*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

eine Sequenz von R-Moduln. Dann sind äquivalent:

(i) *Die Sequenz $M' \to M \to M''$ ist exakt.*

(ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist die Sequenz $(M')_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to (M'')_\mathfrak{p}$ exakt.*

(iii) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist die Sequenz $(M')_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \to (M'')_\mathfrak{m}$ exakt.*

Beweis. Da Lokalisierung exakt ist, gilt die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii), und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial, weil jedes maximale Ideal ein Primideal ist. Nun gelte (iii). Die Inklusion $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$ ist äquivalent zu $g \circ f = 0$. Dies können wir nach Satz 3.30 nach Lokalisierung in maximalen Idealen überprüfen. Weil Lokalisierung mit der Verkettung von Homomorphismen kompatibel ist (denn es handelt sich um einen Funktor), stellt (iii) sicher, dass dies erfüllt ist. Angesichts dessen ist die Gleichheit $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ dann gleichbedeutend mit $\operatorname{Ker}(g)/\operatorname{Im}(f) = 0$. Es gilt $(\operatorname{Ker}(g)/\operatorname{Im}(f))_\mathfrak{m} = \operatorname{Ker}(g_\mathfrak{m})/\operatorname{Im}(f_\mathfrak{m}) = \operatorname{Ker}(g)_\mathfrak{m}/\operatorname{Im}(f)_\mathfrak{m} = 0$, wobei die ersten beiden Gleichheiten gelten, weil Lokalisierung exakt ist (Korollar 3.29 (2)), und die letzte wegen der Voraussetzung (iii). Wir schreiben hier zur Abkürzung $f_\mathfrak{m} = f \otimes \mathrm{id}_{R_\mathfrak{m}}$ etc. Aus Satz 2.83 folgt damit $\operatorname{Ker}(g)/\operatorname{Im}(f) = 0$. □

Satz 3.32. *Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der R-Modul M ist flach.*

(ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist der $R_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p}$ flach.*

(iii) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist der $R_\mathfrak{m}$-Modul $M_\mathfrak{m}$ flach.*

Beweis. Das folgt angesichts der Kompatibilität von Tensorprodukt und Lokalisierung direkt aus dem vorherigen Satz. □

Literatur: [**AM**] Ch. 2, 3

3.4. Abelsche Kategorien *

Der Formalismus der exakten Funktoren kann noch in einem allgemeineren Rahmen studiert werden, den wir hier kurz anreißen wollen.

DEFINITION 3.33. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie.

(1) Ein *initiales Objekt* in $\mathscr{C}$ ist ein Objekt I, so dass für alle Objekte X in $\mathscr{C}$ genau ein Morphismus $I \to X$ existiert.
(2) Ein *terminales Objekt* in $\mathscr{C}$ ist ein Objekt T, so dass für alle Objekte X in $\mathscr{C}$ genau ein Morphismus $X \to T$ existiert.
(3) Ein *Nullobjekt* in $\mathscr{C}$ ist ein Objekt, das sowohl initial als auch terminal ist.

⊣

Alle obigen Eigenschaften lassen sich als universelle Eigenschaften auffassen, so dass initiale, terminale und Null-Objekte jeweils eindeutig bestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, sofern sie existieren. Äquivalent können wir ein initiales Objekt auch als ein »leeres Produkt« (ein Objekt, das die universelle Eigenschaft des Produkts für die leere Menge als Indexmenge hat) und ein terminales Objekt als »leeres Koprodukt« definieren.

BEISPIEL 3.34. In der Kategorie der Mengen ist $\emptyset$ initial und jede Menge mit einem einzigen Element terminal. In der Kategorie der Ringe ist $\mathbb{Z}$ initial und der Nullring terminal. In beiden Fällen existiert kein Nullobjekt. In der Kategorie der Gruppen und in der Kategorie der abelschen Gruppen ist jeweils die triviale Gruppe ein Nullobjekt. Ist R ein Ring, so ist der Nullmodul ein Nullobjekt in der Kategorie der R-Moduln. Die Kategorie der Körper besitzt weder ein initiales noch ein terminales Objekt. ◊

DEFINITION 3.35. Eine *additive Kategorie* ist eine Kategorie $\mathscr{C}$, in der alle Mengen $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ mit der Struktur einer abelschen Gruppe (die wir additiv schreiben) ausgestattet sind, so dass die Komposition von Morphismen bilinear ist, und in der alle endlichen Produkte existieren. ⊣

BEMERKUNG 3.36. Sei $\mathscr{C}$ eine additive Kategorie

(1) Sind X, Y Objekte in $\mathscr{C}$ und $X \times Y$ deren Produkt, so ist $X \times Y$ zusammen mit den Abbildungen $X \to X \times Y$ (induziert von $\mathrm{id}\colon X \to X$, $0\colon X \to Y$) und $Y \to X \times Y$ (analog) ein Koprodukt von X und Y. Allgemeiner zeigt man, dass jedes endliche Produkt (mit den offensichtlichen Abbildungen) gleich dem Koprodukt der entsprechenden Objekte ist. Insbesondere ist das leere Produkt in $\mathscr{C}$, das nach Voraussetzung existiert, ein Nullobjekt.
(2) Man kann zeigen, dass die Gruppenstrukturen auf den $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ eindeutig bestimmt sind, sofern sie existieren.

◊

DEFINITION 3.37. Sei $\mathscr{C}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$.

(1) Ein *Kern* von f ist ein Morphismus $a\colon K \to X$, der die folgende universelle Eigenschaft hat: Für alle Objekte T in $\mathscr{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, K) \to \{g\colon T \to X;\ f \circ g = 0\}, \quad h \mapsto a \circ h,$$

bijektiv.

(2) Ein *Kokern* von f ist ein Morphismus $b\colon Y \to C$, der die folgende universelle Eigenschaft hat: Für alle Objekte T in $\mathscr{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, T) \to \{g\colon Y \to C;\ g \circ f = 0\}, \quad h \mapsto h \circ b,$$

bijektiv.

⊣

Kerne und Kokerne sind eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Jeder Kern ist ein Monomorphismus und jeder Kokern ist ein Epimorphismus. Den Kern von f bezeichnen wir mit $\mathrm{Ker}(f)$, den Kokern mit $\mathrm{Coker}(f)$ (wobei wir hier streng genommen natürlich einen Kern und Kokern auswählen müssen, aber die Wahl keine Rolle spielt, weil zu jedem anderen Kern (bzw. Kokern) ein eindeutig bestimmter Isomorphismus existiert).

Ist $\mathscr{C}$ die Kategorie der Moduln über einem Ring R, und $f\colon X \to Y$ ein R-Modul-Homomorphismus, so ist die Inklusion $\mathrm{Ker}(f) \to X$ ein Kern im Sinne der obigen Definition (und allgemeiner ist jeder injektive R-Modul-Homomorphismus $K \to X$ mit Bild $\mathrm{Ker}(f)$ ein Kern). Entsprechend ist die kanonische Projektion $Y \to Y / \mathrm{Im}(f)$ (und allgemeiner jeder surjektive R-Modul-Homomorphismus $Y \to C$ mit Kern $\mathrm{Im}(f)$) ein Kokern von f.

DEFINITION 3.38. Eine *abelsche Kategorie* ist eine additive Kategorie $\mathscr{C}$, so dass gilt:

(a) Jeder Morphismus in $\mathscr{C}$ besitzt einen Kern und einen Kokern.

(b) Jeder Monomorphismus ist ein Kern eines Morphismus, und jeder Epimorphismus ist ein Kokern eines Morphismus.

⊣

Die Kategorie der abelschen Gruppen und allgemeiner die Kategorie der R-Moduln über einem Ring R sind abelsche Kategorien. Die Kategorie aller freien abelschen Gruppen (d.h. derjenigen abelschen Gruppen, die frei sind als $\mathbb{Z}$-Modul) ist additiv, aber nicht abelsch.

Ist $\mathscr{C}$ eine abelsche Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, so können wir das Bild $\mathrm{Im}(f)$ von f im kategoriellen Sinne definieren als $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ (und es gibt dann einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$).

Da Bilder und Kerne von Morphismen existieren, kann man den Begriff der exakten Sequenz und dann auch den Begriff des exakten Funktors zwischen abelschen Kategorien definieren. Man kann dann zum Beispiel zeigen, dass das Schlangenlemma in jeder abelschen Kategorie richtig ist. In der *Homologischen Algebra* werden systematisch solche Funktoren untersucht, die links- oder rechtsexakt sind, aber nicht exakt sind, und es werden Methoden entwickelt, um genauer zu beschreiben, »inwiefern« ein solcher Funktor nicht exakt ist.

3.5. Morphismen von Funktoren *

Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien. Interessanterweise kann man die Klasse der Funktoren $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ selbst zu einer Kategorie machen, der Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, indem man den Begriff des *Morphismus von Funktoren* definiert. Auch wenn das zunächst vielleicht danach klingt, dass der Kategorienformalismus als Selbstzweck immer weiter ausgebaut werde, ist dies ein sehr nützlicher Begriff, um gewisse natürliche Kompatibilitäten zwischen verschiedenen Arten von mathematischen Objekten auszudrücken. Darauf aufbauend definieren wir unten (Definition 3.42) den Begriff der *Äquivalenz von Kategorien*. Damit kann man zum Beispiel einen großen Teil der Theorie der endlichdimensionalen Vektorräume über einem Körper, wie sie in der Vorlesung Lineare Algebra 1 entwickelt wird, als eine Äquivalenz von Kategorien formulieren, siehe Beispiel 3.45.

DEFINITION 3.39. Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien. Seien $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ Funktoren. Ein *Morphismus* $\Phi\colon F \to G$ *von Funktoren* ist gegeben durch Morphismen $\Phi(X)\colon F(X) \to G(X)$ (in $\mathscr{D}$) für alle Objekte X von $\mathscr{C}$, so dass für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert. ⊣

Die Definition bezieht sich auf kovariante Funktoren, aber indem wir kontravariante Funktoren von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ als kovariante Funktoren $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ (Bemerkung 3.8) betrachten, erhalten wir auch dafür den Begriff eines Morphismus von Funktoren.

Einen Morphismus von Funktoren nennt man manchmal auch eine *natürliche Transformation*.

Ein (banales) Beispiel eines Morphismus eines Funktors F ist der Identitätsmorphismus id_F, wo für alle X die Abbildung $\mathrm{id}_F(X)$ die Identität auf $F(X)$ ist. Es ist klar, dass wir Morphismen von Funktoren verketten können, indem wir die einzelnen Abbildungen für jedes Objekt von $\mathscr{C}$ verketten. Die Verkettung von Morphismen $\Phi\colon F \to G$ und $\Psi\colon G \to H$ bezeichnen wir mit $\Psi \circ \Phi$. Wir erhalten so die Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ aller Funktoren von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$. Insbesondere können wir von *Isomorphismen* von Funktoren sprechen. Das bedeutet konkret das Folgende.

DEFINITION 3.40. Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien. Seien $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ Funktoren. Ein Morphismus $\Phi\colon F \to G$ heißt *Isomorphismus (von Funktoren)*, wenn ein Morphismus $\Psi\colon G \to F$ von Funktoren existiert, so dass $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_F$ und $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_G$ gilt.

Wenn ein Isomorphismus $F \to G$ existiert, schreiben wir auch $F \cong G$ und sagen, F und G seien isomorph. ⊣

LEMMA 3.41. *Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien und seien $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ Funktoren. Ein Morphismus $\Phi\colon F \to G$ von Funktoren ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle Objekte X von $\mathscr{C}$ die Abbildung $\Phi(X)$ bijektiv ist.*

BEWEIS. Es ist klar, dass für einen Isomorphismus Φ alle Abbildungen $\Phi(X)$ bijektiv sind. Gilt umgekehrt diese Bedingung, dann erhalten wir einen Umkehrmorphismus $\Psi\colon G \to F$ zu Φ, indem wir $\Psi(X) = \Phi(X)^{-1}$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ setzen. □

Wir können nun den sehr nützlichen Begriff einer *Äquivalenz von Kategorien* definieren, der gewissermaßen der »bessere« Isomorphismusbegriff für Kategorien ist. Man kann zwar auch von Isomorphismen von Kategorien sprechen (siehe Bemerkung 3.46), aber dies stellt Bedingungen, die in der Praxis für zwei gegebenen Kategorien nur sehr selten erfüllt sind. Dass zwei Kategorien zueinander äquivalent sind, ist eine wesentlich schwächere Aussage, die dementsprechend häufiger erfüllt ist, die aber immer noch sehr nützlich ist.

DEFINITION 3.42. Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien. Ein Funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ heißt eine *Äquivalenz von Kategorien*, wenn ein Funktor $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ existiert, der ein *Quasi-Inverses* (oder: *Pseudo-Inverses*) zu F ist, d.h., dass $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ und $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ gilt. ⊣

Für eine Abbildung f zwischen zwei Mengen wissen wir, dass f genau dann eine Umkehrabbildung besitzt, wenn f bijektiv, also injektiv und surjektiv ist. Der folgende Satz 3.44 liefert eine analoge Charakterisierung für Äquivalenzen von Kategorien. Bevor wir ihn angeben können, müssen wir die entsprechenden Eigenschaften von Funktoren definieren.

DEFINITION 3.43. Ein Funktor $f\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ heißt

(1) *treu*, wenn für alle Objekte X, Y von $\mathscr{C}$ die von F induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y)$ injektiv ist,
(2) *voll*, wenn für alle Objekte X, Y von $\mathscr{C}$ die von F induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y)$ surjektiv ist,
(3) *volltreu*, wenn F voll und treu ist,
(4) *essenziell surjektiv*, wenn für jedes Objekt X' von $\mathscr{D}$ ein Objekt X von $\mathscr{C}$ existiert, so dass $F(X) \cong X'$ ist.

$\dashv$

Weil wir in (4) nicht fordern, dass $F(X) = X'$ ist, sondern nur, dass diese Objekte in $\mathscr{D}$ isomorph sind, spricht man nicht von surjektiven, sondern von essenziell surjektiven Funktoren.

SATZ 3.44. *Ein Funktor F ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn F volltreu und essenziell surjektiv ist.*

BEWEIS. Wir lassen den Beweis hier aus. Er ist ein bisschen »hässlich«, weil die Konstruktion eines Quasi-Inversen von »unnatürlichen« Wahlen abhängt, vergleiche Beispiel 3.45. Siehe [**Ma**] IV.4, Theorem 1 oder [**Br**] Satz 3.6.7. □

BEISPIEL 3.45. Sei K ein Körper. Sei $\mathrm{Vect}_K^{\mathrm{fin}}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume, d.h. die Objekte von K sind alle K-Vektorräume, die Morphismen sind die K-Vektorraum-Homomorphismen.

Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie mit Objekten $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathbb{N}$ und mit Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(n, m) = M_{m\times n}(K)$, die Menge der $(m \times n)$-Matrizen mit Einträgen in K. Für $A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(n, m) = M_{m\times n}(K)$ und $B \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(m, l) = M_{l\times m}(K)$ definieren wir die Verkettung $B \circ A$ als das Matrizenprodukt $BA \in M_{l\times n} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(n, l)$. Es ist klar, dass wir in dieser Weise eine Kategorie erhalten.

Sei $F\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Vect}_K^{\mathrm{fin}}$ der Funktor, der aus Objekten gegeben ist durch $F(n) = K^n$, und der einer Matrix $A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(n, m) = M_{m\times n}(K)$ den Vektorraum Homomorphismus $K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$, zuordnet.

Der Funktor F ist eine Äquivalenz von Kategorien. Das folgt aus, und ist äquivalent zu den folgenden Tatsachen aus der linearen Algebra.

(1) (F volltreu) Es gilt $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) = M_{m\times n}(K)$.
(2) (F essenziell surjektiv) Jeder endlichdimensionale K-Vektorraum ist isomorph zu einem Standardvektorraum K^n. Mit anderen Worten: Jeder (endlichdimensionale) K-Vektorraum besitzt eine Basis.

Einen zu F quasi-inversen Funktor können wir folgendermaßen definieren. Es ist klar, dass dieser auf Objekten durch $V \mapsto \dim_K V$ gegeben sein muss. Um ihn auch auf den Morphismenmengen zu definieren müssen wir für jeden endlichdimensionalen Vektorraum eine Basis wählen. Sind dann V und W mit Basen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$ gegeben und $n = \dim V$, $m = \dim W$, dann definieren wir $\mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{m\times n}(K)$ durch $f \mapsto M^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}(f)$.

Als weitere Konsequenzen aus dieser Aussage erhalten wir, dass K-Vektorräume V, W genau dann isomorph sind, wenn sie dieselbe Dimension haben. Außerdem bekommen wir die Beschreibung von linearen Abbildungen durch Matrizen (bezüglich fixierter Basen von Definitions- und Wertebereich), wobei das Matrizenprodukt der Verkettung von Abbildungen entspricht.

Ein großer Teil der Vektorraumtheorie, wie sie zu Beginn der Vorlesung Lineare Algebra I entwickelt wird, lässt sich also in der Aussage zusammenfassen, dass F eine Äquivalenz von Kategorien ist. $\diamondsuit$

BEMERKUNG 3.46. Es gibt auch den Begriff einer *Isomorphie von Kategorien*. Nämlich nennt man Kategorien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ *isomorph*, wenn Funktoren $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ und $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{F}$ existieren mit $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$. Dies ist aber eine sehr starke Bedingung, die »in der Praxis« nur sehr selten erfüllt ist. Insofern ist dieser Begriff weit seltener nützlich als der der Äquivalenz von Kategorien. $\diamondsuit$

KAPITEL 4

Ganze und endliche Ringhomomorphismen

4.1. Definitionen, einfache Eigenschaften

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt den Begriff der *algebraischen* Körpererweiterung, und zwar nennen wir ein Element eines Rings *ganz* über einem Unterring, wenn es ein *normiertes* Polynom gibt, das dieses Element als Nullstelle hat. In der folgenden Definition wird das noch etwas allgemeiner gefasst insofern als wir nicht unbedingt über einen Unterring sprechen müssen, sondern einen beliebigen (nicht notwendig injektiven) Ringhomomorphismus zugrundelegen können. Ein wichtiger Punkt ist, dass es im Kontext allgemeiner Ringe ein Unterschied ist, ob man fordert, dass ein Element Nullstelle eines normierten Polynoms oder irgendeines Polynoms $\neq 0$ (jeweils mit Koeffizienten in einem vorgegebenen Ring) ist. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ zwar Nullstelle des Polynoms $2X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ (und jede rationale Zahl ist Nullstelle eines geeignet gewählten Polynoms in $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$), aber nicht Nullstelle eines normierten Polynoms in $\mathbb{Z}[X]$ (dies ist nicht völlig offensichtlich, folgt aber aus dem Lemma von Gauß). Im Kontext von Ringen führt es auf den interessanteren Begriff, nur Nullstellen von normierten Polynomen zu erlauben. (Ist R ein Integritätsring, der Unterring eines Integritätsrings S ist, dann ist ein Element von S genau dann Nullstelle irgendeines Polynoms in $R[X] \setminus \{0\}$, wenn das Element, aufgefasst als Element des Quotientenkörpers von S, algebraisch ist über dem Quotientenkörper von R. Im Fall eine Erweiterung von Integritätsringen würde man also auf diese Art und Weise nur den Begriff *algebraisch* umformulieren.)

Wie im Fall von Körpererweiterungen, wo wir algebraische Körpererweiterungen zusammen mit endlichen Erweiterungen untersucht haben, gibt es auch im Fall von Ringen einen Zusammenhang zum Begriff endlich erzeugter Moduln. (Eine Gradformel hat man im allgemeinen allerdings natürlich nicht, genauso wie man für Moduln keinen Dimensionsbegriff hat (jedenfalls keinen, der genauso »gut« funktioniert wie bei Vektorräumen).)

Definition 4.1. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

(1) Ein Element $b \in B$ heißt *ganz über A (bezüglich φ)*, wenn ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ existiert mit $f(b) = 0$.
(2) Der Homomorphismus φ heißt *ganz*, falls jedes Element $b \in B$ ganz über A ist.
(3) Der Homomorphismus φ heißt *endlich*, falls B als A-Modul endlich erzeugt ist.

$\dashv$

Oft, und insbesondere, wenn φ injektiv ist, was im Folgenden häufig der Fall sein wird, schreiben wir einfach a statt $\varphi(a)$ für $a \in A$, das heißt wir betrachten a als Element von B, ohne das in der Notation deutlich zu machen.

Beispiel 4.2. (1) Sind A und B Körper (und damit φ notwendigerweise injektiv, also können wir $A \subseteq B$ als eine Körpererweiterung betrachten), dann ist ein Element $b \in B$ genau dann ganz im Sinne der obigen Definition, wenn es algebraisch im Sinne der Algebra-Vorlesung ist. Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann ganz, wenn die Erweiterung B/A algebraisch ist. Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann endlich, wenn die Erweiterung B/A endlich ist.

(2) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Für jedes Element $a \in A$ ist $\varphi(a)$ ganz über A, denn es ist Nullstelle von $X - a$.

(3) Sei $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die Inklusion. Die einzigen Elemente von $\mathbb{Q}$, die ganz über $\mathbb{Z}$ sind, sind die Elemente von $\mathbb{Z}$.

(4) Die Inklusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist endlich und ganz.

(5) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in K$ ist genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn $\mathrm{minpol}_{\alpha,\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{Z}[X]$ liegt. (Warum?)

$\Diamond$

Als nächsten Schritt wollen wir uns überlegen, dass für ganze und endliche Ringhomomorphismen einige der Eigenschaften gelten, die wir für algebraische und endliche Körpererweiterungen kennen. Insbesondere werden wir zeigen, dass ein Ringhomomorphismus $A \to B$ genau dann endlich ist, wenn er ganz ist und B als A-Algebra endlich erzeugt ist (im Sinne der folgenden Definition), und dass sich die Eigenschaften *endlich* und *ganz* transitiv unter Verkettung von Ringhomomorphismen verhalten.

Definition 4.3. Sei B eine A-Algebra. Dann heißt B eine *endlich erzeugte A-Algebra*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es existieren endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$, so dass B die kleinste A-Unteralgebra von B ist, die alle b_i enthält.

(ii) Es existiert $n \geq 0$ und ein surjektiver A-Algebren-Homomorphismus $A[X_1, \dots, X_n] \to B$.

$\dashv$

Beweis der Äquivalenz. Sind $b_1, \dots, b_n$ wie in (i), dann ist der Einsetzungshomomorphismus $A[X_1, \dots, X_n] \to B$, der durch $X_i \mapsto b_i$ gegeben ist, surjektiv. Ist $\Phi\colon A[X_1, \dots, X_n] \to B$ surjektiv, so erfüllen die Elemente $b_i := \Phi(X_i)$ die Eigenschaft in (i). $\square$

Um den Zusammenhang zwischen ganzen und endlichen Ringhomomorphismen zu klären, benutzen wir die folgender Verallgemeinerung des Satzes von Cayley-Hamilton.

Satz 4.4 (Satz von Cayley-Hamilton). *Sei R ein Ring.*

(1) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_n(R)$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen in R. Sei* $\mathrm{charpol}_A = \det(TE_n - A) \in R[X]$ *das charakteristische Polynom von A. Dann gilt* $\mathrm{charpol}_A(A) = 0 \in M_n(R)$.

(2) *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und $\varphi\colon M \to M$ ein R-Endomorphismus von M mit $\varphi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann existieren Elemente $a_i \in \mathfrak{a}$ mit*

$$\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \,\mathrm{id}_M = 0 \qquad \textit{in } \mathrm{End}(M).$$

Beweis. Zu (1). Wir beweisen die Aussage durch »Reduktion auf den universellen Fall«. Damit ist die folgende Beweisstrategie gemeint:

(I). Wir wissen bereits, dass die Aussage richtig ist, wenn R ein Körper ist (Satz LA2.16.21).

(II) Ist $R \subseteq S$ ein Unterring und gilt die Aussage für S, dann gilt sie auch für R, denn wir können jede Matrix $A \in M_n(R)$ als Matrix in $M_n(S)$ auffassen, und den Satz auf A und S anwenden. Das charakteristische Polynom von A ist davon unabhängig, ob es über R oder über S berechnet wird. Mit (I) folgt, dass die Aussage für jeden Integritätsring R gilt, weil wir R als Unterring seines Quotientenkörpers $\mathrm{Quot}(R)$ betrachten können.

(III) Ist $\varphi\colon S \to R$ ein Ringhomomorphismus und ist $\tilde{A} \in M_n(S)$, dann folgt die Aussage für R und die Matrix A, die aus $\tilde{A}$ entsteht, indem auf jeden Eintrag φ angewendet wird, aus der Aussage für S und $\tilde{A}$. Denn in diesem Fall entsteht $\mathrm{charpol}_A$ aus $\mathrm{charpol}_{\tilde{A}}$, indem auf jeden Koeffizienten φ angewendet wird. Weil der Einsetzungshomomorphismus ein Ringhomomorphismus ist, folgt die Behauptung.

(IV) Der allgemeine Fall folgt nun aus (III): Sei R ein Ring und $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(R)$. Sei $S := \mathbb{Z}[X_{ij};\ i,j = 1, \dots, n]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in n^2 Variablen und sei $\varphi\colon S \to R$ der Einsetzungshomomorphismus mit $X_{ij} \mapsto a_{ij}$. Weil S ein Integritätsring ist, gilt der Satz von Cayley-Hamilton nach (II) für jede $(n \times n)$-Matrix in $M_n(S)$, also insbesondere für die Matrix $(X_{ij})_{i,j}$. (Weil die Einträge dieser Matrix die Unbestimmten des Polynomrings sind, spricht man vom *universellen Fall.*) Nach (III) folgt die Aussage des Satzes für die Matrix $A \in M_n(R)$.

Zu (2). Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M. Wir können dann $\varphi(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ für Elemente $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ schreiben. Wir wenden Teil (1) an auf die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(R)$. Es ist klar, dass die Koeffizienten von $\mathrm{charpol}_A$ in $\mathfrak{a}$ liegen. Aus $\mathrm{charpol}_A(A) = 0$ folgt $\mathrm{charpol}_A(\varphi) = 0$ und damit die Behauptung. □

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und sei $b \in B$. Wir bezeichnen dann mit $A[b]$ das Bild des Einsetzungshomomorphismus $A[X] \to B$, $X \mapsto b$, also die von b erzeugte A-Unteralgebra von B. Die Elemente von $A[b]$ sind die Ausdrücke $\sum a_i b^i$ mit $a_i \in A$ (oder genauer die Ausdrücke $\sum \varphi(a_i)b^i$), wobei wir wie immer nur endliche Summen betrachten.

Satz 4.5. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und sei $b \in B$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das Element b ist ganz über A.*

(ii) *Die von b erzeugte A-Algebra $A[b]$ ist als A-Modul endlich erzeugt, d.h. $A \to A[b]$ ist ein endlicher Ringhomomorphismus.*

(iii) *Es existiert ein Unterring $C \subseteq B$ mit $b \in C$, so dass $A \to C$ ein endlicher Ringhomomorphismus ist.*

Beweis. Wenn b ganz über A ist, etwa $f(b) = 0$ für $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, dann ist $1, b, \dots, b^{n-1}$ ein Erzeugendensystem von $A[b]$ als A-Algebra. Das zeigt die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii), und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.

Für die »schwierige« Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) wenden wir Satz 4.4 an. Und zwar sei $\xi\colon C \to C$ gegeben durch $x \mapsto bx$. Dies ist ein A-Modul-Endomorphismus des endlich erzeugten A-Moduls C, und folglich finden wir ein normiertes Polynom $p \in A[X]$ mit $p(\xi) = 0$. Aber der Endomorphismus $p(\xi)$ ist gegeben durch Multiplikation mit $p(b)$, und weil insbesondere das Element $1 \in C$ unter $p(\xi)$ auf 0 abgebildet wird, folgt $p(b) = 0$. □

Lemma 4.6. *Seien $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ Ringhomomorphismen. Wenn φ und ψ endlich sind, so ist auch $\psi \circ \varphi$ endlich.*

Beweis. Wenn $b_1, \dots, b_m \in B$ den A-Modul B und $c_1, \dots, c_n \in C$ den B-Modul C erzeugen, dann erzeugen die Elemente b_ic_j ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) den A-Modul C. □

Damit erhalten wir als Folgerung aus dem Satz das Korollar, das ganz analog ist zu der Charakterisierung von endlichen Körpererweiterungen als endlich erzeugte algebraische Erweiterungen.

Korollar 4.7. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Homomorphismus φ ist ganz und B ist als A-Algebra endlich erzeugt.*

(ii) *Die A-Algebra B wird von endlich vielen Elementen erzeugt, die über A ganz sind.*

(iii) *Der Homomorphismus φ ist endlich.*

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar, und (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt aus der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) in Satz 4.5 und Lemma 4.6. Gilt (iii), dann finden wir ein endliches Erzeugendensystem von B als A-Modul, also erst recht als A-Algebra. Aus Satz 4.5 folgt dann, dass (i) erfüllt ist. □

Außerdem können wir nun auch begründen, dass sich die Eigenschaft *ganz* transitiv verhält.

Korollar 4.8. *Seien $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ Ringhomomorphismen. Wenn φ und ψ ganz sind, so ist auch $\psi \circ \varphi$ ganz.*

Beweis. Seien φ und ψ ganz und sei $c \in C$. Dann existiert ein normiertes Polynom in $B[X]$, das c als Nullstelle hat. Die A-Unteralgebra B' von B, die von den Koeffizienten dieses Polynoms erzeugt wird, ist endlich erzeugt und ganz über A, also ein endlicher A-Modul. Weil auch $B'[c]$ endlich über B' ist, folgt, dass $B'[c]$ endlich über A ist. Also ist c ganz über A. □

Definition 4.9. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist die Teilmenge

$$C := \{b \in B;\ b \text{ ist ganz über } A\}$$

ein Unterring von B, der als der *ganze Abschluss von A in B* bezeichnet wird. ⊣

Beweis. Es ist zu zeigen, dass es sich bei C tatsächlich um einen Unterring handelt. Es ist klar, dass $0, 1 \in C$ gilt. Sind $c, c' \in C$, dann ist $A[c, c']$ endlich über A (Korollar 4.7), also sind alle Elemente dieser A-Algebra ganz über A, insbesondere $c + c'$, $-c$, cc'. □

Definition 4.10. Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann heißt A *ganzabgeschlossen in B*, wenn A mit dem ganzen Abschluss von A in B übereinstimmt, mit anderen Worten: wenn die einzigen Elemente von B, die ganz über A sind, die Elemente von A sind.

Ein Integritätsring heißt *ganzabgeschlossen*, wenn er ganzabgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist. ⊣

Beispiel 4.11. (1) Der Ring $\mathbb{Z}$ ist ganzabgeschlossen.

(2) Allgemeiner gilt: Jeder faktorielle Ring ist ganzabgeschlossen. (Das ist nicht offensichtlich, aber auch nicht sehr schwierig. Die Umkehrung ist nicht richtig, was zu »interessanten Problemen« in algebraischer Geometrie und algebraischer Zahlentheorie führt.)

(3) Sei K ein Körper. Die Teilmenge

$$R = \left\{ \sum_i a_i X^i;\ a_1 = 0 \right\} \quad K[X]$$

ist ein Unterring. Es gilt $\mathrm{Quot}(R) = K(X)$.

Der Ring R ist nicht ganzabgeschlossen, denn zum Beispiel das Element X ist (warum?) ganz über R, liegt aber nicht in R.

Vergleiche Hausaufgabe 4, Ergänzung LA2.15.55, Beispiel ALG.3.41.

◊

Bemerkung 4.12. Seien $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $C \subseteq B$ der ganze Abschluss von A in B. Dann ist C ganzabgeschlossen in B. Dies folgt aus Korollar 4.8. ◊

Satz 4.13. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein endlicher (bzw. ganzer) Ringhomomorphismus.*

(1) *Ist $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal, so ist auch der von φ induzierte Homomorphismus $A / \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \to B / \mathfrak{b}$ endlich (bzw. ganz).*

(2) *Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist auch der von φ induzierte Homomorphismus $S^{-1}A \to S^{-1}B$ endlich (bzw. ganz).*

(3) *Ist C eine A-Algebra, so ist auch der von φ induzierte Homomorphismus $C \to B \otimes_A C$ endlich (bzw. ganz).*

Beweis. Alle Behauptungen sind relativ leicht zu beweisen und wir lassen den Beweis hier aus. □

Literatur: [**AM**] Ch. 5, [**M2**] §9

4.2. Going-up

Satz 4.14. *Seien A und B Integritätsringe und sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist A ein Körper genau dann, wenn B ein Körper ist.*

Beweis. Sei zunächst A ein Körper und $b \in B \setminus \{0\}$ mit $p(b) = 0$ für ein normiertes Polynom $p = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]$, $a_d = 1$. Sei j minimal mit $a_j \neq 0$. Weil A ein Körper ist, ist dann a_j in A invertierbar und wir erhalten

$$(b^{d-j-1} + a_{d-1}b^{d-j-2} + \cdots + a_{j+1})b^{j+1} = -a_j b^j.$$

Weil B ein Integritätsring und $b \neq 0$ ist, folgt

$$-\frac{1}{a_j}(b^{d-j} + a_{d-1}b^{d-j-1} + \cdots + a_{j+1})b = 1.$$

Also ist b in $A[b]$ und damit insbesondere in B invertierbar.

Ist andererseits B ein Körper und $a \in A \setminus \{0\}$, dann existiert $b \in B$ mit $ab = 1$, und b ist ganz über A, also $p(b) = 0$ für ein normiertes Polynom $p = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A[X]$, $a_d = 1$. Dann ist

$$b - a^{d-1}p(b) = b - (a^{d-1}b^d + a_{d-1}a^{d-1}b^{d-1} + \cdots + a_0 a^{d-1}) = -(a_{d-1} + a_{d-2}a + \cdots + a_0 a^{d-1}) \in A,$$

also $b \in A$. □

Satz 4.15. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.*

Beweis. In der Situation des Satzes induziert φ einen Ringhomomorphismus $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{q}$. Dieser ist ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus zwischen Integritätsringen, so dass wir Satz 4.14 anwenden können. Das liefert die Behauptung. □

Satz 4.16. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus und seien $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ Primideale von B mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$. Dann gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Der Homomorphismus φ induziert einen ganzen Ringhomomorphismus $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$, wobei wir mit $B_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von B bezüglich der multiplikativen Teilmenge $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ bezeichnen. Wegen der Beschreibung von Primidealen in der Lokalisierung (Satz 2.47) können wir φ durch diesen Homomorphismus ersetzen und dadurch annehmen, dass $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$ ein maximales Ideal von A ist. Satz 4.15 impliziert dann, dass $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ maximale Ideale von B sind. Aus der Inklusion $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ folgt also die Gleichheit. □

Theorem 4.17. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist die von φ induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ surjektiv, d.h. für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ existiert $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.*

Beweis. Indem wir wie im Beweis von Satz 4.16 zu den Lokalisierungen $A_\mathfrak{p}$ und $B_\mathfrak{p}$ übergehen, können wir uns auf die Situation reduzieren, dass A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist.

Sei dann $\mathfrak{q}$ in B irgendein maximales Ideal. Weil $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal von A ist, folgt $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ aus Satz 4.16.

Frage: Wo wurde im Beweis die Injektivität von φ benutzt? Geben Sie ein Beispiel eines (nicht-injektiven) ganzen Ringhomomorphismus an, so dass die auf den Spektren induzierte Abbildung nicht surjektiv ist. (Es gibt aber auch nicht-injektive ganze Ringhomomorphismen φ, so dass φ^a surjektiv ist.) □

Induktiv können wir dieses Ergebnis zu dem folgenden Theorem verfeinern, das auch als *going up theorem* bezeichnet wird, weil man in der vorgegebenen Kette von Primidealen $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A)$ »nach oben gehen« und jeweils Urbilder in $\operatorname{Spec}(B)$ finden kann.

Theorem 4.18 (going-up). *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus, sei*

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subset A$$

eine Kette von Primidealen, und sei

$$\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m \subset B$$

eine Kette von Primidealen in B mit $m \leq n$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, m$.

Dann existieren Primideale $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n \subset B$, so dass $\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1}$ und so dass $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$ für alle i gilt.

Beweis. Per Induktion können wir uns auf den Fall $m = 1$, $n = 2$, einschränken, so dass nur ein Schritt in der Kette der $\mathfrak{q}_i$ zu ergänzen ist, nämlich $\mathfrak{q}_2$.

Nun induziert φ einen injektiven ganzen Ringhomomorphismus $A/\mathfrak{p}_1 \to B/\mathfrak{q}_1$, und auf diesen können wir Satz 4.17 anwenden. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.31. □

Endlichkeit von Ringhomomorphismen spiegelt sich auch in der auf den Primspektren induzierten Abbildung wider, unter anderem dadurch, dass die Fasern dieser Abbildung endlich (und als topologische Räume diskret) sind.

Theorem 4.19. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Dann sind die Fasern der Abbildung ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ endliche Mengen, und zwischen den Primidealen in einer Faser bestehen keine echten Inklusionen.*

Beweis. Dass zwischen Primidealen von B, die unter f auf dasselbe Primideal von A abgebildet werden, keine Inklusionen bestehen, folgt aus Satz 4.16. In Satz 4.23 unten sehen wir noch einen anderen Beweis für diese Tatsache.

Um zu zeigen, dass jede Faser nur endlich viele Elemente hat, brauchen wir einige Vorbereitungen. Der Beweis nimmt den Rest dieses Abschnitts in Anspruch. □

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die auf den Primspektren induzierte Abbildung. Wir beginnen damit, die Faser $f^{-1}(\mathfrak{p})$ von f über einem Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ als Spektrum eines Rings zu beschreiben.

Satz 4.20. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die von φ induzierte Abbildung, sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und sei $\kappa(\mathfrak{p})$ der Restklassenkörper von A in $\mathfrak{p}$. Dann induziert die natürliche Abbildung $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \to \operatorname{Spec} B$ eine Bijektion [genauer: sogar einen Homöomorphismus] von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ auf die Faser $f^{-1}(\mathfrak{p})$ von f über $\mathfrak{p}$.*

Beweis. Es ist $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$, und folglich $B \otimes_A \kappa(p) = S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$, wobei die multiplikative Teilmenge S, bezüglich der wir lokalisieren, gegeben ist durch $S = \pi(\varphi(A \setminus \mathfrak{p}))$. Hier ist $\pi\colon B \to B/\mathfrak{p}B$ die kanonische Projektion.

Mit den Sätzen 2.31 und 2.47 können wir die Menge der Primideale von $B \otimes_A \kappa(p)$ als Teilmenge von $\mathrm{Spec}(B)$ beschreiben, und zwar als die Teilmenge derjenigen Primideale $\mathfrak{q} \subset B$, die $\mathfrak{p}B$ enthalten (und für jedes solche gilt $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{p}$), und die S nicht treffen. Insgesamt erhalten wir so genau diejenigen Primideale, für die $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ gilt.

Dass die Inklusion $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \to \mathrm{Spec}(B)$ sogar ein Homöomorphismus auf diese Teilmenge ist, folgt daraus, dass die Bijektionen zu Primidealen in Lokalisierung/im Quotienten aus den gerade genannten Sätzen jeweils Homöomorphismen sind. $\square$

Wenn wir mit einem endlichen Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ beginnen, dann sind die auf diese Weise auftretenden Ringe $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ artinsche Ringe im Sinne der folgenden Definition.

Definition 4.21. Ein Ring R heißt *Artin-Ring* oder *artinsch*, wenn für die Ideale in R die absteigende Kettenbedingung gilt, d.h., falls jede absteigende Kette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots$$

von Idealen in R stationär wird, d.h. es existiert $N \geq 0$, so dass $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_N$ für alle $n \geq N$. ⊣

Satz 4.22. *Sei A ein Körper und $A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Dann ist B ein Artin-Ring.*

Beweis. Wir können B als A-Vektorraum auffassen. Jedes Ideal von B ist dann insbesondere ein Untervektorraum. Weil B als A-Vektorraum endlich-dimensional ist, gilt die obige Kettenbedingung sogar für Untervektorräume, also erst recht für Ideale. $\square$

Ist $\varphi\colon A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, dann erhalten wir durch den Basiswechsel $A \to \kappa(\mathfrak{p})$ einen Ringhomomorphismus $\kappa(\mathfrak{p}) \to B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$, der nach Satz 4.13 ebenfalls endlich ist. Folglich ist $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ in dieser Situation ein Artin-Ring. Angesichts dessen schließt der Beweis des folgenden Satzes auch den Beweis von Theorem 4.19 ab.

Satz 4.23. *Sei B ein Artin-Ring.*

(1) *Alle Primideale von B sind maximale Ideale.*
(2) *Der Ring B besitzt nur endlich viele Primideale.*

Beweis. Zu (1). Sei $\mathfrak{p} \subset B$ ein Primideal. Der Quotient $B/\mathfrak{p}$ ist ebenfalls ein Artin-Ring. Es genügt also zu zeigen, dass jeder artinsche Integritätsring B ein Körper ist. Ist $x \in B \setminus \{0\}$, dann bilden die Ideale (x^i) für $i \geq 0$ eine absteigende Kette. Weil diese stationär wird, existiert i mit $x^i \in (x^{i+1})$, etwa $x^i = x^{i+1}y$ und damit $xy = 1$, weil B ein Integritätsring ist. Also ist x eine Einheit in B.

Zu (2). Angenommen, es gäbe unendlich viele paarweise verschiedene maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots$ in B. Dann ist

$$B \supsetneq \mathfrak{m}_1 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supsetneq \cdots$$

eine absteigende Kette, in der alle Inklusionen echt sind.

Um zu zeigen, dass es sich um echte Inklusionen handelt, kann man entweder direkt argumentieren: Denn wäre $\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i = \bigcap_{i=1}^{r+1} \mathfrak{m}_i$ für ein $r \geq 0$, dann erhalten wir $\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}_{r+1}$ und damit nach Lemma 2.63 eine Inklusion $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}_{r+1}$ für ein i, $1 \leq i \leq r$. Weil $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_{r+1}$ verschiedene maximale Ideale sind, ist das unmöglich.

Oder man benutzt den chinesischen Restsatz (Satz ALG.3.14), der zeigt, dass für jedes r die Projektion $B \to \bigoplus_{i=1}^r B/\mathfrak{m}_i$ surjektiv mit Kern $\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i$ ist. Wäre nun $\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i = \bigcap_{i=1}^{r+1} \mathfrak{m}_i$ für ein r, dann wäre die Projektion $\bigoplus_{i=1}^{r+1} B/\mathfrak{m}_i \to \bigoplus_{i=1}^{r} B/\mathfrak{m}_i$ ein Isomorphismus, was offensichtlich nicht der Fall ist. □

Literatur: [**AM**] Ch. 5, Ch. 8, [**M2**] §9

4.3. Noether-Normalisierung und der Hilbertsche Nullstellensatz

In diesem Abschnitt werden wir mit dem Noetherschen Normalisierungslemma und dem Hilbertschen Nullstellensatz zwei Ergebnisse über endlich erzeugte Algebren über einem Körper beweisen, die in besonderem Maße einer geometrischen Interpretation im Sinne des Primspektrums bzw. Maximalspektrums zugänglich sind. Das folgende Theorem von Emmy Noether[1] erlaubt es, zu einer endlich erzeugten k-Algebra R, k ein Körper, einen injektiven endlichen Ringhomomorphismus $k[X_1, \dots, X_n] \to R$ zu finden. Die zugehörige Abbildung auf den Primspektren ist dann surjektiv und hat endliche Fasern. Man erhält auch eine Abbildung zwischen den Maximalspektren (das ist eine Konsequenz des Nullstellensatzes von David Hilbert[2], Korollar 4.31 unten) mit denselben Eigenschaften.

THEOREM 4.24 (Noethersches Normalisierungslemma). *Sei k ein Körper und sei $R \neq 0$ eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $n \geq 0$ und ein injektiver endlicher k-Algebren-Homomorphismus $k[X_1, \dots, X_n] \to R$.*

BEWEIS. Seien $y_1, \dots, y_m \in R$ Erzeuger von R als k-Algebra. Wir haben also einen surjektiven Homomorphismus $\psi\colon k[Y_1, \dots, Y_m] \to R$, $Y_i \mapsto y_i$, von k-Algebren.

Wir führen nun Induktion nach m. Wenn ψ injektiv ist, dann sind wir fertig. Sei nun $\mathrm{Ker}(\psi) \neq 0$. Es genügt dann, eine k-Unteralgebra $S \subseteq R$ zu finden, die sich von $m-1$ Elementen erzeugen lässt und so dass die Inklusion $S \to R$ endlich (äquivalent: ganz) ist. Denn dann finden wir nach Induktionsvoraussetzung einen injektiven endlichen Ringhomomorphismus von einem Polynomring über k nach S, und durch Verkettung mit der Inklusion $S \to R$ einen solchen nach R.

Sei $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$, $f \neq 0$, also $f(y_1, \dots, y_m) = 0$. Wir machen nun den folgenden Ansatz: Für $r_2, \dots, r_m \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$z_i := y_i - y_1^{r_i}.$$

Dann erzeugen $y_1, z_2, \dots, z_m$ die k-Algebra R. Wir werden zeigen, dass wir die r_i so wählen können, dass y_1 ganz ist über $S := k[z_2, \dots, z_m]$. Daraus folgt dann die Behauptung.

Jedenfalls ist y_1 eine Nullstelle des Polynoms $g(Y_1) := f(Y_1, z_2 + Y_1^{r_1}, \dots, z_m + Y_1^{r_m}) \in S[Y_1]$. Es genügt dann zu zeigen, dass für eine geeignete Wahl der r_i dieses Polynom (in Y_1) Leitkoeffizient in $k^\times$ hat, denn dann können wir durch den Leitkoeffizienten teilen und erhalten ein normiertes Polynom mit y_1 als Nullstelle und mit Koeffizienten in S.

Das Polynom g ist eine k-Linearkombination von Ausdrücken der Form $Y_1^{b_1} \prod_{i=2}^m (z_i + Y_1^{r_i})^{b_i}$ für $b_i \in \mathbb{N}$. (Welche Tupel $(b_i)_i$ hier auftreten, hängt von f ab.) Der Grad eines solchen Ausdrucks ist $b_1 + \sum_i r_i b_i$. Es genügt dann, die r_i so zu wählen, dass die Ausdrücke $b_1 + \sum_i r_i b_i$ für alle Tupel $(b_i)_i$, die mit Koeffizient $\neq 0$ auftreten, paarweise verschieden sind, denn dann liefert das (eindeutig bestimmte) Tupel, für das der Ausdruck maximal wird, den höchsten Exponenten von Y_1 in g.

Es ist leicht zu sehen, dass man die r_i so wählen kann, dass das der Fall ist, zum Beispiel folgendermaßen: Wir betrachten die endlich vielen Polynome $\sum b_i X^{i-1} \in \mathbb{Z}[X]$ für Tupel

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

$(b_i)_i$ wie oben, und wählen $x \in \mathbb{Z}$ so, dass die Werte aller dieser Polynome bei x paarweise verschieden sind. Dann können wir $r_i := x^{i-1}$, $i = 2, \dots, m$, setzen. □

BEISPIEL 4.25. Sei k ein Körper.

(1) Ist $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ normiert als Polynom in X_n, dann induziert die Inklusion $k[X_1, \dots, X_{n-1}] \to k[X_1, \dots, X_n]$ einen endlichen injektiven k-Algebren-Homomorphismus $k[X_1, \dots, X_{n-1}] \to k[X_1, \dots, X_n] / (f)$.
(2) Der injektive Ringhomomorphismus $k[X] \to k[X, Y] / (XY)$ ist nicht endlich. (Warum?)
(3) Der injektive Ringhomomorphismus $k[X] \to k[X, Y] / (XY-1)$ ist nicht endlich. (Warum?) Der injektive Ringhomomorphismus $k[T] \to k[X, Y] / (XY - 1)$, $T \mapsto X - Y$ ist endlich. (Warum?)

◇

DEFINITION 4.26. Ein Ring A heißt *Jacobsonsch*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}} \mathfrak{m}.$$

⊣

THEOREM 4.27 (Hilbertscher Nullstellensatz). *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra.*

(1) *Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A, so ist $k \to A / \mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung.*
(2) *Der Ring A ist Jacobsonsch.*

BEWEIS. Für Teil (1) verwenden wir das Noethersche Normalisierungslemma, mit dem wir einen injektiven endlichen k-Algebren-Homomorphismus $\varphi\colon k[X_1, \dots, X_n] \to A / \mathfrak{m}$ finden. Weil φ endlich und $A / \mathfrak{m}$ ein Körper ist, ist $k[X_1, \dots, X_n]$ nach Satz 4.14 ebenfalls ein Körper, aber das bedeutet $n = 0$. Also ist $A / \mathfrak{m}$ endlich über k.

Für Teil (2) beginnen wir mit einer Vorbemerkung. Ist k'/k eine endliche Körpererweiterung und $\varphi\colon A \to k'$ ein Homomorphismus von k-Algebren, dann ist das Bild ein Integritätsring, der als k-Vektorraum endlichdimensional ist, also ein Körper. Deshalb ist $\operatorname{Ker}(\varphi)$ ein maximales Ideal von A.

Sei nun $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Indem wir A durch $A / \mathfrak{p}$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A ein Integritätsring und $\mathfrak{p} = 0$ ist. Zu zeigen ist dann, dass $\operatorname{Jac}(A) = 0$ gilt.

Angenommen, es gäbe ein Element $x \in \operatorname{Jac}(A) \setminus \{0\}$. Dann ist die Lokalisierung A_x (die isomorph ist zu $A[Y] / (xY-1)$) eine endlich erzeugte k-Algebra $\neq 0$. Sei $\mathfrak{n} \subset A_x$ ein maximales Ideal. Nach dem zuvor Gezeigten ist $A_x / \mathfrak{n}$ ein endlicher Erweiterungskörper von k und der Kern der Verkettung $A \to A_x \to A_x / \mathfrak{n}$ ist nach der Vorbemerkung ein maximales Ideal von A. Aber das Bild von x ist eine Einheit, also liegt x nicht im Kern – ein Widerspruch. □

Auch das folgende Korollar, in dem die maximalen Ideale im Polynomring (in endlich vielen Unbestimmten) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper bestimmt werden, wird oft als (eine Version des) Hilbertschen Nullstellensatzes bezeichnet. Es ist klar, dass für $(x_i)_i \in k^n$ das Ideal $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \subset k[X_1, \dots, X_n]$ maximal ist, denn es handelt sich um den Kern des Einsetzungshomomorphismus $k[X_1, \dots, X_n] \to k$, $X_i \mapsto x_i$. (Dass der Kern nicht größer ist, folgt leicht mit Polynomdivision und Induktion nach n.)

KOROLLAR 4.28. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

(1) *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra und sei* $\mathfrak{m} \subset A$ *ein maximales Ideal. Dann gilt* $A/\mathfrak{m} = k$.

(2) *Sei* $\mathfrak{m} \subset k[X_1, \dots, X_n]$ *ein maximales Ideal. Dann existieren* $x_1, \dots, x_n \in k$ *mit*

$$\mathfrak{m} = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n).$$

BEWEIS. Zu (1). Wir betrachten $A/\mathfrak{m}$ bezüglich der Verkettung $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ als Erweiterungskörper von k. Nach dem Theorem handelt es sich um einen endlichen Erweiterungskörper. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, folgt die Gleichheit.

Zu (2). Für gegebenes $\mathfrak{m}$ ist $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} = k$ nach Teil (1). Wir definieren x_i als das Bild von X_i unter der Verkettung $k[X_1, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} = k$. Dann ist offensichtlich das Ideal $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ in $\mathfrak{m}$ enthalten, und weil es sich um ein maximales Ideal handelt, folgt die Gleichheit. □

Aus Satz 2.17 über die Ideale im Quotienten eines Rings nach einem Ideal können wir damit auch das folgende Korollar ableiten.

KOROLLAR 4.29. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien* $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$. *Dann haben wir eine Bijektion*

$$\{(x_i)_i \in k^n;\ \forall j : f_j(x_1, \dots, x_n) = 0\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spm}(k[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_m)),$$
$$(x_i)_i \mapsto (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$$

Außerdem sehen wir, dass eine Familie von Polynomen in $k[X_1, \dots, X_n]$ eine gemeinsame Nullstelle in k^n haben muss, wenn sie nicht das Einsideal erzeugt. (In letzterem Fall kann es offensichtlich keine gemeinsame Nullstelle geben.) Diese Tatsache ist der Grund, warum der obige Satz *Nullstellensatz* heißt.

KOROLLAR 4.30. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien* $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$. *Dann gilt*

$$V(f_1, \dots, f_m) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad (f_1, \dots, f_m) = (1).$$

Als weiter Folgerung sehen wir, dass sich für einen Homomorphismus von endlich erzeugten k-Algebren (k ein Körper, der nicht algebraisch abgeschlossen sein muss) die induzierte Abbildung zwischen den Primspektren zu einer Abbildung zwischen den Maximalspektren einschränkt.

KOROLLAR 4.31. *Sei k ein Körper und sei* $\varphi\colon A \to B$ *ein Homomorphismus von endlich erzeugten k-Algebren. Dann ist für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{n} \subset B$ *das Urbild* $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ *ein maximales Ideal von A.*

BEWEIS. Es ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ gerade der Kern der Verkettung $A \to B \to B/\mathfrak{n}$. Die Behauptung folgt aus Theorem 4.27 zusammen mit der Vorbemerkung zum Beweis von Teil (2) dieses Theorems. □

Weitere Literatur: **[AM]** Ch. 5, **[Mu]** I.1, **[GW]** (1.3).

KAPITEL 5

Noethersche Ringe

5.1. Definition und einfache Eigenschaften

DEFINITION 5.1. Ein Ring R heißt *noethersch*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i) Jede aufsteigende Kette

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$$

von Idealen in R wird stationär, d.h. es existiert $n \geq 0$, so dass $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_n$ für alle $m \geq n$.

(ii) Jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.

(iii) Jede nichtleere Menge von Idealen in R besitzt ein maximales Element bezüglich Inklusion.

$\dashv$

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ. Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, das nicht endlich erzeugt ist, dann können wir eine Folge $a_i \in \mathfrak{a}$ von Elementen finden, $i \in \mathbb{N}$, so dass $(a_1, \dots, a_n) \subsetneq (a_1, \dots, a_{n+1})$ für alle n gilt. Das liefert eine Kette von Idealen in R, die nicht stationär wird. Das zeigt die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii).

Ist andererseits jedes Ideal von R endlich erzeugt und $\mathscr{M}$ eine nichtleere Menge von Idealen in R, dann folgt aus dem Lemma von Zorn (siehe Abschnitt LA1.B.1 oder Axiom ALG.3.24), dass $\mathscr{M}$ ein maximales Element besitzt. Wir müssen dazu zeigen, dass jede (bezüglich Inklusion) total geordnete Menge $(\mathfrak{a}_i)_i$ von Idealen in R eine obere Schranke in $\mathscr{M}$ besitzt. Da die Menge total geordnet ist, ist die Vereinigung $\mathfrak{a}$ aller $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von R. Weil dieses nach Voraussetzung endlich erzeugt ist, folgt, dass $\mathfrak{a}$ mit einem der $\mathfrak{a}_i$ übereinstimmt (für i so groß, dass $\mathfrak{a}_i$ alle Elemente irgendeines fixierten endlichen Erzeugendensystems enthält). Also liegt $\mathfrak{a}$ in $\mathscr{M}$. Das zeigt (ii) $\Rightarrow$ (iii) und die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) ist klar (setze $\mathscr{M} := \{\mathfrak{a}_i;\ i \geq 0\}$). $\square$

Die Kettenbedingung in der obigen Definition ähnelt formal derjenigen in Definition 4.21, wo wir *aufsteigende* Ketten betrachtet und damit den Begriff des Artin-Rings definiert haben. Interessanterweise ist aber die Bedingung, artinsch zu sein, eine wesentlich stärkere Einschränkung. Insbesondere kann man zeigen, dass jeder artinsche Ring noethersch ist.

BEISPIEL 5.2. (1) Jeder Hauptidealring ist noethersch (Lemma LA2.15.46).

(2) Ist R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist auch $R/\mathfrak{a}$ noethersch. Das folgt leicht aus Satz 2.17.

(3) Sei $R \neq 0$ ein Ring. Dann ist der Polynomring $R[X_i;\ i \in \mathbb{N}]$ in unendlich vielen Unbestimmten nicht noethersch. Insbesondere sind Unterringe noetherscher Ringe nicht notwendig noethersch: Ist R ein Integritätsring, so ist dieser Polynomring ebenfalls ein Integritätsring und daher ein Unterring seines Quotientenkörpers.

$\diamondsuit$

SATZ 5.3. *Sei R ein noetherscher Ring, S ⊆ A eine multiplikative Teilmenge. Dann ist $S^{-1}R$ noethersch.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{a} \subseteq S^{-1}R$ ein Ideal. Wir zeigen, dass dieses endlich erzeugt ist. Bezeichne dazu $\tau\colon R \to S^{-1}R$ die natürliche Abbildung von R in die Lokalisierung und sei $\mathfrak{b} = \tau^{-1}(\mathfrak{a})$. Dann ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt, etwa $\mathfrak{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Es ist dann leicht zu sehen, dass $\mathfrak{a} = \left(\frac{b_1}{1}, \dots, \frac{b_n}{1}\right)$ gilt. Jedenfalls ist die Inklusion $\supseteq$ klar. Ist andererseits $\frac{a}{s} \in \mathfrak{a}$, $s \in S$, dann ist $a \in \mathfrak{b}$, und daraus folgt, dass $\frac{a}{s} \in \left(\frac{b_1}{1}, \dots, \frac{b_n}{1}\right)$ gilt. □

DEFINITION 5.4. Sei R ein Ring (nicht notwendig noethersch). Ein R-Modul M heißt *noethersch*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i) Jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M wird stationär.
(ii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.
(iii) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M besitzt ein maximales Element bezüglich Inklusion.

⊣

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ. Dies beweist man wie in Definition 5.1. □

Insbesondere folgt aus Bedingung (ii), dass jeder noethersche Modul endlich erzeugt ist. Ist R ein noetherscher Ring, dann gilt auch die Umkehrung, wie wir unten sehen werden; für allgemeine Ringe ist diese aber nicht richtig.

Mit dieser Definition gilt: Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn der R-Modul R noethersch ist.

SATZ 5.5. *Sei R ein Ring.*

(1) *Sei*
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt: M ist genau dann noethersch, wenn M′ und M″ noethersch sind.

(2) *Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.*

BEWEIS. Zu (1). Es ist leicht zu zeigen, dass M' und M'' noethersch sind, wenn das für M gilt. Seien nun M' und M'' noethersch und sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Seien $f\colon M' \to M$ und $g\colon M \to M''$ die Homomorphismen aus der gegebenen kurzen exakten Sequenz. Aus der Voraussetzung folgt, dass $g(N)$ und $f^{-1}(N)$ endlich erzeugt sind, etwa $g(N) = \langle c_1, \dots, c_s\rangle$, $f^{-1}(N) = \langle a_1, \dots, a_r\rangle$. Wir wählen für $i = 1, \dots, s$ jeweils ein Urbild b_i von c_i unter g. Man prüft dann leicht nach, dass $f(a_1), \dots, f(a_r), b_1, \dots, b_s$ ein Erzeugendensystem von N bilden.

Zu (2). Aus Teil (1) folgt zunächst mit Induktion, dass jeder endlich erzeugte freie R-Modul, also jeder Modul der Form R^n, noethersch ist, denn wir haben offensichtliche kurze exakte Sequenzen $0 \to R^{n-1} \to R^n \to R \to 0$. Ist M irgendein endlich erzeugter R-Modul, dann existieren $n \geq 0$ und eine Surjektion $R^n \to M$, und erneute Anwendung von Teil (1) liefert, dass M noethersch ist. □

5.2. Der Hilbertsche Basissatz

THEOREM 5.6 (Hilbertscher Basissatz). *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R[X]$ ein Ideal. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist. Sei $\mathfrak{b} \subseteq R$ die Menge aller Elemente von R, die als Leitkoeffizient eines Polynoms in $\mathfrak{a}$ auftreten. Es ist leicht zu sehen, dass es sich bei $\mathfrak{b}$ um ein Ideal handelt. Nach Voraussetzung ist dieses endlich erzeugt, etwa durch Elemente $b_1, \dots, b_r$, von denen wir annehmen können, dass sie von 0 verschieden sind. Sei N so groß gewählt, dass zu jedem i ein Polynom f_i in $\mathfrak{a}$ vom Grad $\leq N$ mit Leitkoeffizient b_i existiert. Indem wir gegebenenfalls mit einer Potenz von X multiplizieren, können wir annehmen, dass alle f_i Grad N haben.

Der Untermodul $M := \langle 1, \dots, X^{N-1} \rangle_R$ von $R[X]$ ist endlich erzeugt und folglich (Satz 5.5) noethersch. Sei $g_1, \dots, g_s$ ein Erzeugendensystem von $M \cap \mathfrak{a}$ als R-Modul.

Behauptung. Die Elemente $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$ sind ein Erzeugendensystem des Ideals $\mathfrak{a}$.

Begründung. Sei $f \in \mathfrak{a}$. Wir wollen zeigen, dass $f \in (f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$ gilt. Wenn f Grad $\geq N$ hat, können wir den Grad verringern, indem wir ein geeignetes Polynom aus $(f_1, \dots, f_r)$ abziehen (denn der Leitkoeffizient von f liegt in $\mathfrak{b}$). Dann liegt f selbst genau dann in $(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$, wenn dies für das neue Polynom gilt. Wir können daher annehmen, dass $\deg(f) < N$ gilt. Das bedeutet aber, dass $f \in M \cap \mathfrak{a} = (g_1, \dots, g_s)$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Per Induktion folgt aus dem Satz auch, dass jeder Polynomring in endlich vielen Unbestimmten über einem noetherschen Ring selbst noethersch ist.

KOROLLAR 5.7. *Sei R ein noetherscher Ring und A eine endlich erzeugte R-Algebra. Dann ist auch der Ring A noethersch.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Surjektion $\pi\colon R[X_1, \dots, X_n] \to A$ für ein geeignet gewähltes n. Wir können dann A als Modul über dem noetherschen Ring $R[X_1, \dots, X_n]$ auffassen. Dieser ist offensichtlich endlich erzeugt, also noethersch. Eine Teilmenge von A ist genau dann ein Ideal, wenn es sich um einen $R[X_1, \dots, X_n]$-Untermodul handelt. Es folgt also, dass die Ideale in A die Kettenbedingung für noethersche Ringe erfüllen. □

Literatur: **[AM]** Ch. 6, 7, **[M2]** §3

KAPITEL 6

Die Krull-Dimension eines Rings *

Dieses Kapitel enthält im Moment keine Beweise, siehe die Literaturhinweis am Ende.

6.1. Definition und einfache Eigenschaften

DEFINITION 6.1. (1) Sei X ein topologischer Raum. Wir nennen X *irreduzibel*, wenn X nicht leer ist und die folgenden äquivalenten Eigenschaften gelten:

(i) Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A \cup B$, so gilt $A = X$ oder $B = X$.

(ii) Sind $U, V \subseteq X$ nicht-leere offene Teilmengen von X, so gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *irreduzibel*, wenn sie als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

(2) Sei X ein topologischer Raum. Die *Dimension* $\dim X$ von X ist das Supremum aller Längen ℓ von Ketten

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_\ell$$

von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Per Konvention setzen wir $\dim \emptyset = -\infty$.

$\dashv$

Ist beispielsweise X ein einziger Punkt, so gilt $\dim X = 0$. Ist X irreduzibel, $\dim X < \infty$ und $Z \subsetneq X$ eine echte abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so gilt $\dim Z < \dim X$.

BEMERKUNG 6.2. Dieser Dimensionsbegriff ist für die topologischen Räume, die in der algebraischen Geometrie auftreten, gut geeignet — speziell für Räume der Form $\operatorname{Spec} R$ für einen Ring R. Für andere topologische Räume ist er aber nicht unbedingt sinnvoll. $\diamondsuit$

LEMMA 6.3. *Sei R ein Ring. Eine abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} R$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ ist genau dann irreduzibel, wenn das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ (Satz 2.59) ein Primideal ist.*

DEFINITION 6.4. Sei R ein Ring. Die *(Krull-)Dimension* $\dim R$ von R ist das Supremum aller Längen ℓ von Ketten

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_\ell$$

von Primidealen in R. Für den Nullring setzen wir $\dim 0 = -\infty$. $\dashv$

LEMMA 6.5. *Sei R ein Ring. Dann gilt* $\dim R = \dim \operatorname{Spec} R$.

Als Folgerung aus dem going-up-Theorem (Theorem 4.18) erhält man das folgende Ergebnis.

SATZ 6.6. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Dann gilt* $\dim A = \dim B$.

Insbesondere zeigt der Satz, dass in der Situation des Noether-Normalisierungslemma Thm. 4.24 die Zahl n als $\dim R$ eindeutig bestimmt ist.

6.2. Irreduzible Komponenten und minimale Primideale

DEFINITION 6.7. Sei X ein topologischer Raum. Die maximalen irreduziblen Teilmengen von X heißen *irreduzible Komponenten.* ⊣

LEMMA 6.8. *Sei X ein topologischer Raum.*

(1) *Jede irreduzible Teilmenge von X ist in einer irreduziblen Komponente von X enthalten. Insbesondere ist X gleich der Vereinigung aller seiner irreduziblen Komponenten.*
(2) *Sei $Z \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $\overline{Z}$ ihr Abschluss in X. Es gilt: Z ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{Z}$ irreduzibel ist.*
(3) *Jede irreduzible Komponente von X ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Insbesondere sehen wir: Ist R ein Ring, so steht die Menge der irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} R$ in Bijektion zur Menge der minimalen Primideale von R.

DEFINITION 6.9. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von X stationär ist. ⊣

BEMERKUNG 6.10. Ist R ein noetherscher Ring, so ist der topologische Raum $\operatorname{Spec} R$ noethersch. (Die Umkehrung gilt aber nicht.) ◊

SATZ 6.11. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

SATZ 6.12. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann hat R nur endlich viele minimale Primideale.*

6.3. Die Dimension von endlich erzeugten Algebren über einem Körper

6.3.1. Der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung.

DEFINITION 6.13. Sei L/K eine Körpererweiterung.

(1) Eine Teilmenge $S \subseteq L$ heißt *algebraisch unabhängig über K*, wenn der Einsetzungshomomorphismus
$$K[X_s, s \in S] \to L, \quad X_s \mapsto s,$$
injektiv ist.
(2) Eine Teilmenge $S \subseteq L$ heißt eine *Transzendenzbasis* der Erweiterung L/K, wenn S algebraisch unabhängig über K ist und die Erweiterung $L/K(S)$ algebraisch ist.

⊣

LEMMA 6.14. *Sei L/K eine Körpererweiterung.*

(1) *Eine Teilmenge $S \subseteq L$ ist genau dann algebraisch unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge es ist.*
(2) *Eine Teilmenge $S \subseteq L$ ist genau dann eine Transzendenzbasis, wenn sie eine maximale algebraisch unabhängige Teilmenge von L ist.*
(3) *Die Erweiterung L/K besitzt eine Transzendenzbasis.*
(4) *Sind S, S' Transzendenzbasen der Erweiterung L/K, so existiert eine Bijektion $S \xrightarrow{\sim} S'$. Insbesondere ist die Anzahl der Elemente einer Transzendenzbasis (genauer: die Mächtigkeit einer Transzendenzbasis) unabhängig von der Wahl der Transzendenzbasis. Diese Mächtigkeit wird als der* Transzendenzgrad *der Erweiterung L/K bezeichnet, in Zeichen:* $\operatorname{trdeg}_K L$.

Insbesondere sehen wir: Eine Erweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn sie den Transzendenzgrad 0 hat.

Ist R eine k-Algebra, die ein Integritätsring ist, so schreiben wir auch $\operatorname{trdeg}_k R := \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Quot}(R)$.

Beispiel 6.15. Ist K ein Körper, so gilt

$$\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \dots, X_n] = \operatorname{trdeg}_K K(X_1, \dots, X_n) = n.$$

$\Diamond$

6.3.2. Die Normabbildung einer Körpererweiterung.

Siehe auch Abschnitt ALG.6.2.

Definition 6.16. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Für $x \in L$ sei φ_x der K-Vektorraum-Homomorphismus $L \to L, y \mapsto xy$. Wir nennen $N_{L/K}(x) := \det(\varphi_x) \in K$ die *Norm* von x und die Abbildung $N_{L/K} : L \to K$ die *Normabbildung* der Erweiterung L/K. $\dashv$

Satz 6.17 (Eigenschaften der Normabbildung). *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung.*

(1) *Ist $x \in K$, so gilt $N_{L/K}(x) = x^{[L:K]}$.*
(2) *Sind $x, y \in L$, so gilt $N_{L/K}(xy) = N_{L/K}(x) N_{L/K}(y)$.*
(3) *Ist $x \in L$ und $\operatorname{minpol}_{x,K} = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$, so gilt*

$$N_{L/K}(x) = (-1)^{[L:K]} a_0^{[L:K(x)]}.$$

Bemerkung 6.18. Weitere wichtige Eigenschaften der Normabbildung sind

(1) Transitivität: Sind $K \subset E \subset L$ endliche Körpererweiterungen und ist $x \in L$, so gilt $N_{L/K}(x) = N_{L/E}(N_{E/K}(x))$.
(2) Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung, so gilt

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)} \sigma(x).$$

$\Diamond$

Theorem 6.19. *Seien k ein Körper und R eine endlich erzeugte k-Algebra, die ein Integritätsring ist. Sei $f \in R, f \neq 0$ ein Element, das keine Einheit in R ist, und sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, das f enthält und das minimal mit dieser Eigenschaft ist. Dann gilt*

$$\operatorname{trdeg}_k R/\mathfrak{p} = \operatorname{trdeg}_k R - 1.$$

Korollar 6.20. *Sei k ein Körper.*

(1) *Sei R eine endlich erzeugte k-Algebra, die ein Integritätsring ist. Dann gilt* $\dim R = \operatorname{trdeg}_k R$.
(2) *Sei $n \geq 0$. Dann gilt* $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$.

Korollar 6.21. *Sei R eine endlich erzeugte k-Algebra, die ein Integritätsring ist. Dann haben alle maximalen Ketten von Primidealen in R (d.h. alle Ketten, die nicht durch das Einfügen weiterer Primideale verfeinert werden können) die Länge* $\dim R$.

6.4. Dimensionstheorie für noethersche Ringe

Für allgemeine noethersche Ringe ist die Situation komplizierter. Immerhin haben wir die folgenden Ergebnisse:

Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so nennt man $\operatorname{ht} \mathfrak{p} := \dim R_{\mathfrak{p}}$ die *Höhe* des Primideals $\mathfrak{p}$.

THEOREM 6.22 (Krullscher Hauptidealsatz). *Sei R ein noetherscher Ring und sei $(f) \subsetneq R$ ein Hauptideal. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ von R mit $f \in \mathfrak{p}$ und das minimal ist mit dieser Eigenschaft, dass*

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq 1.$$

THEOREM 6.23. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann gilt*

$$\dim R[X] = \dim R + 1.$$

BEISPIEL 6.24. Sei R ein lokaler Hauptidealring, $(t) \subset R$ das maximale Ideal. Dann ist $R[X] \,/\, (tX - 1) \cong R_t = \operatorname{Quot}(R)$ ein Körper, also $(tX - 1)$ ein maximales Ideal *von Höhe* 1, es gilt also

$$\dim R[X]/(tX - 1) = 0 < 1 = \dim R[X] - 1.$$

$\lozenge$

Weitere Literatur zu diesem Kapitel: **[Mu]** I §7, **[GW]** (1.5), (1.7), (5.3)–(5.6), **[AM]** Ch. 11, **[M2]** §5, **[Bo-A]** 4.7, 7.1.

KAPITEL 7

Diskrete Bewertungsringe und Dedekindringe *

Dieses Kapitel enthält im Moment keine Beweise, siehe die Literaturhinweis am Ende.

7.1. Diskrete Bewertungsringe

DEFINITION 7.1. Sei K ein Körper. Eine *diskrete Bewertung auf K* ist eine surjektive Abbildung $v\colon K^\times \to \mathbb{Z}$, für die gilt:

(a) $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle $x, y \in K^\times$,

(b) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ für alle $x, y \in K^\times$.

$\dashv$

BEMERKUNG 7.2. Sei K ein Körper mit einer diskreten Bewertung v. Sei $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$. Dann definiert

$$|x| = c^{v(x)} \text{ für } x \in K^\times, \qquad |0| = 0,$$

einen Absolutbetrag auf K, d.h. eine Abbildung $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}$ mit

(a) $|x| = 0 \iff x = 0$,

(b) $|xy| = |x| \cdot |y|$,

(c) (Dreiecksungleichung) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Genauer gilt in dieser Situation sogar die *starke Dreiecksungleichung*:

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|).$$

Man spricht in diesem Fall von einem *nicht-archimedischen* Absolutbetrag. $\diamondsuit$

LEMMA 7.3. *Sei K ein Körper mit einer diskreten Bewertung v. Dann ist*

$$\{x \in K;\ v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$

ein Unterring von K, der sogenannte Bewertungsring *von (K, v).*

BEISPIEL 7.4. (1) Sei R ein faktorieller Ring, $K = \mathrm{Quot}(R)$, $p \in R$ ein Primelement. Jedes Element $x \in K^\times$ lässt sich schreiben als $x = p^n \frac{a}{b}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in R$, $p \nmid ab$. Dabei ist n eindeutig bestimmt und durch $v(x) := n$ wird eine diskrete Bewertung auf K definiert.

(2) Sei speziell $K = \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Die wie in (1) definierte Bewertung v_p heißt die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Der Bewertungsring von v_p ist der Ring $\mathbb{Z}_{(p)}$, die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ nach dem Primideal (p). Man kann zeigen, dass alle diskreten Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ diese Form haben.

(3) Sei speziell $K = k(T)$ der rationale Funktionenkörper über einem Körper k. Wie in (1) definiert dann jedes irreduzible Polynom $f \in k[T]$ eine Bewertung v_f auf K. Der Bewertungsring von v_f ist der Ring $k[T]_{(f)}$.

(4) Sei $K = k(T)$ wie in 3. Dann ist auch $K = \mathrm{Quot}(k[T^{-1}])$ und wenn wir die Konstruktion in (1) auf das Primelement $T^{-1} \in k[T^{-1}]$ anwenden, erhalten wir eine Bewertung v_∞ auf K, die nicht von der Form v_f wie in (3) ist. Es gilt

$$v_\infty(\frac{f}{g}) = \deg g - \deg f \text{ für } f, g \in k[T], g \neq 0.$$

Der Bewertungsring von v_∞ ist der Ring

$$k[T^{-1}]_{(T^{-1})} = \{\frac{f}{g};\, f, g \in k[T], g \neq 0,\ \deg f \leq \deg g\} \subset K.$$

Man kann zeigen, dass alle Bewertungen auf K die Form $v_f, f \in k[T]$ irreduzibel, oder v_∞ haben.

◊

Definition 7.5. Sei A ein Integritätsring, $K = \mathrm{Quot}(A)$. Der Ring A heißt *diskreter Bewertungsring*, falls eine diskrete Bewertung auf K existiert, deren Bewertungsring A ist. ⊣

Bemerkung 7.6. Sei K ein Körper mit diskreter Bewertung v, und sei A der zugehörige Bewertungsring. Es gilt

$$A^\times = \{x \in A;\ v(x) = 0\}.$$

Sei $\pi \in A$ ein Element mit $v(\pi) = 1$. Ein solches Element heißt *uniformisierendes Element*. Dann gilt: Jedes Element $x \in A$ lässt sich schreiben als $x = \pi^{v(x)}u$ mit $u \in A^\times$ (und u ist eindeutig bestimmt).

Jedes Ideal von A außer dem Nullideal hat die Form (π^d), $d \geq 0$. Das Ideal (π) ist das einzige maximale Ideal von A. Insbesondere ist A ein lokaler Hauptidealring. ◊

Lemma 7.7. *Sei A ein Integritätsring. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Ring A ist ein diskreter Bewertungsring.*
(ii) *Der Ring A ist noethersch und lokal, und das maximale Ideal von A ist ein Hauptideal.*

Theorem 7.8. *Sei A ein Integritätsring. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Ring A ist ein diskreter Bewertungsring.*
(ii) *Der Ring A ist ein lokaler Hauptidealring, aber kein Körper.*
(iii) *Der Ring A ist noethersch, ganzabgeschlossen und es gibt genau ein Primideal* $\neq 0$ *in A.*

7.2. Dedekindringe

Definition 7.9. Sei A ein Integritätsring. Wir sagen, A habe Dimension 1, in Zeichen: $\dim A = 1$, falls A kein Körper ist, und jedes Primideal $\neq 0$ in A ein maximales Ideal ist. ⊣

Diese Definition ist konsistent mit der allgemeinen Definition 6.4.

Theorem 7.10. *Sei A ein Integritätsring, der kein Körper ist. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist ganzabgeschlossen, noethersch und* $\dim A = 1$.
(ii) *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \neq 0$ *von A ist* $A_\mathfrak{p}$ *ein diskreter Bewertungsring.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann nennen wir A einen Dedekindring.

THEOREM 7.11. *Sei A ein Dedekindring, $K = \mathrm{Quot}(A)$, sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Dann ist auch B ein Dedekindring.*

BEMERKUNG 7.12. Der Satz ist auch ohne die Voraussetzung, dass die Erweiterung L/K separabel sei, richtig, allerdings dann deutlich schwieriger zu beweisen. ◊

7.2.1. Die Spur einer separablen Körpererweiterung.

Siehe auch Abschnitt ALG.6.2.

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Sei $x \in L$. Dann ist die Abbildung $\varphi_x\colon L \to L$, $y \mapsto xy$, ein Homomorphismus von K-Vektorräumen, und wir setzen $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) := \mathrm{Spur}(\varphi_x)$, und erhalten so eine Abbildung $\mathrm{Tr}_{L/K}\colon L \to K$, die sogenannte *Spurabbildung*.

Sei im folgenden stets L/K eine endliche *separable* Körpererweiterung, und sei $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ die Menge aller K-Homomorphismen von L in einen fixierten algebraischen Abschluss von L

LEMMA 7.13. *Für alle $x \in L$ gilt $Tr_{L/K}(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x)$.*

SATZ 7.14. *Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Dann ist die Abbildung*

$$L \times L \to K, \quad (x,y) \mapsto Tr_{L/K}(xy),$$

eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem K-Vektorraum L.

LEMMA 7.15. *Sei A ein Dedekindring, $K = \mathrm{Quot}(A)$, sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Dann gilt für alle $b \in B$: $Tr_{L/K}(b) \in A$.*

SATZ 7.16. *Sei A ein Dedekindring, $K = \mathrm{Quot}(A)$, sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine K-Basis von L mit $\alpha_i \in B$ für alle i, und ist $d = \det(Tr_{L/K}(\alpha_i\alpha_j))$, so gilt*

$$dB \subseteq A\alpha_1 + \cdots + A\alpha_n.$$

7.3. Zerlegung von Idealen in Primideale in Dedekindringen

Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K.

DEFINITION 7.17. Ein *gebrochenes Ideal von A* ist ein von 0 verschiedener endlich erzeugter A-Untermodul $\mathfrak{a} \subset K$. ⊣

Jedes Ideal $\neq 0$ von A ist ein gebrochenes Ideal. Ist $x \in A$, $x \neq 0$, so ist $x^{-1}A$ ein gebrochenes Ideal von A.

Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein gebrochenes Ideal. Wir setzen

$$\mathfrak{a}^{-1} := \{x \in K; x\mathfrak{a} \subseteq A\}.$$

Dies ist wieder ein gebrochenes Ideal von K.

Für gebrochene Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von A definieren wir ihr Produkt durch

$$\mathfrak{ab} := \langle ab; a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\rangle_A,$$

d.h. als den von allen Produkten von Elementen aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ erzeugten A-Untermodul von K, vergleiche Definition 2.11. Für $n \geq 1$ definieren wir $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \cdot \dots \cdot \mathfrak{a}$ (n Faktoren), für $n < 0$ sei $\mathfrak{a}^n := (\mathfrak{a}^{-1})^{-n}$. Wir setzen $\mathfrak{a}^0 := (1)$.

BEISPIEL 7.18. Sei A ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann sind die gebrochenen Ideale von A gerade die Untermoduln $\mathfrak{m}^d$, $d \in \mathbb{Z}$. ◊

LEMMA 7.19. *Sei A ein Dedekindring. Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gebrochene Ideale von A. Dann gilt:*

(1) *Sei* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. *Wie üblich bezeichnen wir für jeden* A*-Modul* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *die Lokalisierung bezüglich* $S = A \setminus \mathfrak{p}$. *Dann gilt*
- $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} + \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$,
- $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$,
- $(\mathfrak{a}^{-1})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p})^{-1}$.

(2) *Es gilt genau dann* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, *wenn für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *gilt:* $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$.

SATZ 7.20. *Sei A ein Dedekindring. Dann ist die Menge der gebrochenen Ideale von A eine Gruppe bezüglich des soeben definierten Produkts. Das neutrale Element ist das Ideal A. Das Inverse eines gebrochenen Ideals* $\mathfrak{a}$ *ist* $\mathfrak{a}^{-1}$. *Insbesondere gilt* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = A$ *und* $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{a}$ *für alle gebrochenen Ideale* $\mathfrak{a}$.

THEOREM 7.21. *Sei A ein Dedekindring, und sei* $\mathfrak{a} \subseteq A$ *ein Ideal* $\neq 0$. *Dann existieren endlich viele paarweise verschiedene Primideale* $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ *und natürliche Zahlen* $n_i \geq 1$, *so dass*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{n_r}.$$

Dabei ist r eindeutig bestimmt, und die $\mathfrak{p}_i$ *und* n_i *sind eindeutig bestimmt bis auf die Reihenfolge.*

Für das Einsideal ist die durch das Theorem gegebene Zerlegung das leere Produkt. Mit den Notationen des Theorems gilt: Die Primideale, in denen $\mathfrak{a}$ enthalten ist, sind genau $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$.

Man kann zeigen, dass jeder Integritätsring, der kein Körper ist, und in dem sich jedes Ideal $\neq 0$ als endliches Produkt von Primidealen schreiben lässt, ein Dedekindring ist, siehe [**M2**] Theorem 11.6.

BEISPIEL 7.22. Der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ ist der Ring $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Der Ring A ist also ein Dedekindring. Er ist allerdings nicht faktoriell, zum Beispiel sind

$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

zwei verschiedene Zerlegungen von 6 in Produkte irreduzibler Elemente. Die Ideale (2), (3), $(1 - \sqrt{-5})$ und $(1 + \sqrt{-5})$ sind keine Primideale. Die Ideale

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= (2, 1 + \sqrt{-5}), \\ \mathfrak{p}_2 &= (2, 1 - \sqrt{-5}), \\ \mathfrak{p}_3 &= (3, 1 + \sqrt{-5}), \\ \mathfrak{p}_4 &= (3, 1 - \sqrt{-5}) \end{aligned}$$

sind Primideale und es gilt

$$(2) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad (3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, \quad (1 + \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3, \quad (1 - \sqrt{-5}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4,$$

und die obige Zerlegung erklärt sich als

$$(6) = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4) = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4).$$

◊

Literaturverweise zu diesem Kapitel: [**AM**] Ch. 9, [**M2**] §11, [**S**] Ch. 1. [**N**] I §2, [**Bo-A**] 4.7.

ANHANG A

Literatur zur Kommutativen Algebra *

Es gibt eine Reihe von sehr guten Büchern zur Kommutativen Algebra:

Atiyah, Macdonald [**AM**]. Einer der »Klassiker«, der praktisch alle Ergebnisse der Vorlesung, und einiges darüberhinaus enthält. Ein großer Teil der Vorlesung lässt sich in diesem Buch direkt »wiederfinden«. Im Abschnitt über Dedekindringe gehen wir allerdings etwas anders vor.

Bosch, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer 2013.
`https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4829-6`
Ein neueres Buch, das (mehr oder weniger) die typischen Vorlesungen *Kommutative Algebra* und *Algebraische Geometrie* (Schematheorie) abdeckt.

Bourbaki [**B**]. Die »Enzyklopädie« zur Kommutativen Algebra. Sehr umfangreich und ausführlich geschrieben, wegen der vielen Rückverweise ist es aber vielleicht nicht ganz leicht, sich dort auf Anhieb zurecht zu finden.

Eisenbud [**E**]. Ein relativ neues Buch zur kommutativen Algebra, das an vielen Stellen an die algebraische Geometrie anknüpft.

Görtz-Wedhorn [**GW**] Appendix B. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse mit Verweisen auf die Literatur, aber (fast) ohne Beweise.

Matsumura [**M2**]. Ein sehr umfangreiches Buch, das über den Stoff von [**AM**] deutlich herausgeht. Insgesamt knapper geschrieben als [**AM**]. Von Matsumura gibt es auch noch das ältere Buch [**M1**], das zwar einen großen Durchschnitt mit dem neueren Buch hat, aber auch einige Themen abhandelt, die sich in letzterem nicht finden.

Stacks Project[1] [**St**]

> Das Stacks-Projekt ist eine Online-Enzyklopädie, in der die Theorie der algebraischen Stacks (ein Begriff aus der algebraischen Geometrie) einschließlich aller Voraussetzungen dargestellt werden soll. Momentaner Zwischenstand der pdf-Datei (Anfang April 2022): gut 7400 Seiten. Das Projekt wurde initiiert und wird betreut von Johan de Jong[2]. Das Kapitel über kommutative Algebra finden Sie unter `https://stacks.math.columbia.edu/tag/00AO`.

Zariski, Samuel [**ZS**]. Ein weiterer Klassiker, der aber insgesamt ein bisschen in die Jahre gekommen ist.

[1] `https://stacks.math.columbia.edu/`
[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Aise_Johan_de_Jong`

Literaturverzeichnis

[AM] M. Atiyah, I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley

[Bo-A] S. Bosch, *Algebra*, 9. Aufl., Springer 2020.
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61649-9

[B] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, oder auf Englisch: *Commutative Algebra*, Ch. 1–10, Springer.

[Br] M. Brandenburg, *Einführung in die Kategorientheorie*, Springer 2016.
https://doi.org/10.1007/978-3-662-47068-8

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View towards Algebraic Geometry*, Springer Graduate Texts in Math. **150**, Springer 1995.

[LA1] U. Görtz, *Lineare Algebra 1*, Vorlesungsskript Univ. Duisburg-Essen, WS2020/21, https://math.ug/la1-ws2021/

[LA2] U. Görtz, *Lineare Algebra 2*, Vorlesungsskript Univ. Duisburg-Essen, SS 2021, https://math.ug/la2-ss21/

[ALG] U. Görtz, *Algebra*, Vorlesungsskript Univ. Duisburg-Essen, WS2021/22, https://math.ug/la1-ws2122/

[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, 2. Auflage, Springer 2010.
https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9722-0

[Ma] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer Graduate Texts in Math. **5**, 1971.

[M1] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, 2nd ed., Math. Lecture Note Series **56**, Benjamin/Cummings 1980.

[M2] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, revised ed., 2009.

[Mu] D. Mumford, *The Red Book on Varieties and Schemes*, Springer Lecture Notes in Math. **1358**, 2nd exp. ed., 1999.

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer.

[S] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann 1962 (oder auf Englisch: *Local fields*, Springer Graduate Texts in Math. **67**, 1979)

[St] *The Stacks project*, https://stacks.math.columbia.edu, 2022.

[ZS] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. I, Vol. II, Springer Graduate Texts in Math. **28**, **29**.

Index